Projet de Recherche

—

Méthodes variationnelles pour l'étude d'une EDP non-linéaire critique

Un résultat de compacité globale

Université Libre de Bruxelles

Lorenzo Carletti

Sous la supervision de
M. Bruno Premoselli

Juin 2021

Avant-Propos

La dénomination de méthodes variationnelles englobe tous les outils mathématiques permettant de trouver les points critiques d'une fonctionnelle sur un espace de fonctions approprié. Leur intérêt réside dans le lien qu'il y a entre un point critique et la solution d'une certaine équation aux dérivées partielles. Physiquement, on donne aussi un sens profond à ce lien, entre les équations régissant l'évolution de quantités et la fonctionnelle souvent dite d'énergie, qui possède alors une interprétation concrète. Toute la subtilité de ces méthodes de résolution consiste à définir les bons espaces, avec des normes associées permettant à notre fonctionnelle d'être quelques fois bornée, compacte ou de satisfaire Palais-Smale par exemple. Ces conditions nous autoriseront ensuite à appliquer des Théorèmes généraux d'analyse fonctionnelle et ainsi de résoudre des problèmes concrets.

Ce travail se concentrera sur des équations dites elliptiques, faisant apparaître l'opérateur différentiel de Laplace. On commencera par introduire quelques définitions et résultats standards d'analyse fonctionnelle, pour directement pouvoir s'intéresser à un problème non-linéaire sous-critique. Celui-ci sera approché de deux points de vue différents, avec des résolutions indépendantes. Nous en viendrons ensuite à la section centrale du travail, consistant à étudier cette même équation dans le cas critique, pour aboutir au résultat présenté par Struwe (2008, Théorème III.3.1). Ce Théorème est dit de compacité globale car comme on le verra, bien que des suites de Palais-Smale ne convergeront pas fortement, on pourra explicitement caractériser ce qui les en empêche. On ne pourra parfois pas faire mieux que décomposer ces fonctions de cette façon et c'est pourquoi on étend l'appellation de compacité. On appliquera enfin les outils développés dans cette dernière section pour brièvement observer le problème de Yamabe, et présenter quelques résultats importants dans ce domaine.

La source principale du projet a été le livre *Variational Methods* (Struwe, 2008), je me serai aussi inspiré des cours de Premoselli, B. à l'Université Libre de Bruxelles et de Hajlasz, P. à l'University of Pittsburg pour la première partie introductive. On se réfèrera également à *Partial Differential Equations* de Evans (1998). Ce travail s'adresse à un public ayant déjà vu au moins une introduction aux espaces fonctionnels et plus particulièrement aux espaces de Sobolev, avec leurs résultats d'injections et de régularité pour des équations linéaires elliptiques. Toutes les notions requises seront en effet réintroduites mais sans rentrer dans les détails ou les preuves, pour une présentation complète et exhaustive on pourra se référer à *Sobolev Spaces* (Adams & Fournier, 2003).

Ce travail a été écrit dans le cadre du cours MathF-430 du master en Sciences Mathématiques à l'Université Libre de Bruxelles, et j'aimerais remercier mon promoteur M. Bruno Premoselli pour toute l'aide qu'il m'a apporté lors de sa rédaction.

Lorenzo Carletti

Table des matières

1 Méthodes variationnelles pour problèmes d'EDP **1**
1.1 Introduction d'analyse fonctionnelle 1
1.2 Méthodes de Minimax 12

2 Étude d'une équation critique **18**
2.1 Quelques observations 18
2.2 Résultat principal 29
2.3 Le problème de Yamabe : 40

Références **43**

Chapitre 1

Méthodes variationnelles pour problèmes d'EDP

1.1 Introduction d'analyse fonctionnelle

Dans cette section, nous allons rappeler les résultats et notions nécessaires à l'analyse des équations aux dérivées partielles. Nous introduiront aussi certains concepts dits variationnels pour l'étude de l'existence de solutions à ces dernières. Cette théorie est désormais classique et le lecteur pourra se référer à Adams et Fournier (2003) pour des preuves complètes et exhaustives. La structure du chapitre est également grandement inspiré des cours de Hajlasz (s. d.) ; Premoselli (2020-2021), tandis que la théorie est aussi présentée dans Evans (1998). On omettra la plupart des preuves dans un premier temps, dans un soucis de brièveté et pour pouvoir passer directement au cœur du sujet.

Espaces de Sobolev : Historiquement, les espaces de Sobolev ont été introduits dans le contexte de problèmes variationnels, lorsqu'on cherche les bons espaces sur lesquels définir des fonctionnelles d'énergie pour qu'elles admettent des minimiseurs.

Problème 1.1 (Dirichlet). Présentons le problème de Dirichlet, issu de la physique. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert borné, et g continu sur $\partial\Omega$, on cherche $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{sur } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

Un résultat connu, appelé Principe de Dirichlet, est que la résolution de ce problème revient à trouver un minimiseur $u \in C^2(\Omega)$, tel que $u|_{\partial\Omega} = g$, à la fonctionnelle d'énergie $I(u) := \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx$ dans le sens que $I(u) \leq I(w)$ $\forall w \in C^2(\Omega)$ avec $w|_{\partial\Omega} = g$. Notons pour la suite cet ensemble de fonctions $C^2_g(\Omega)$, on remarque que $C^2_g = g + C^2_0$, où $C^2_0(\Omega) = \{u \in C^2(\Omega) \quad \text{t.q. } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$ espace vectoriel.

Puisque I est à valeurs positives, on aimerait pouvoir dire qu'il possède un minimiseur. Toutefois plusieurs problèmes émergent lorsqu'on veut considérer naïvement ce problème de minimisation, ou problème variationnel de façon générale. D'une part selon la norme dont on munit C^2_0, on peut trouver une suite fonctions de normes tendant vers l'infini, mais avec une énergie $I(u_n)$ restant finie. Pour éviter ce cas pathologique, qui ne permet pas d'étudier mathématiquement la fonctionnelle

avec nos outils classiques, on va munir C_0^2 de la norme

$$\|u\|_{1,2} := \sqrt{\|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2}, \qquad \text{avec norme } L^p(\Omega) : \ \|u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx\right)^{1/p}.$$

Dans ce cas si $\|u_n\|_{1,2} \to \infty$ alors $|I(u_n)| \to \infty$, I est dite *coercive*. Ce n'est pas exactement clair directement mais ceci vient en fait de l'inégalité de Poincaré que nous présenterons plus tard.

Mais alors l'espace fonctionnel $\left(C_0^2(\Omega), \|\cdot\|_{1,2}\right)$ n'est pas complet, on peut facilement prendre des fonctions C^∞ qui tendent vers une fonction qui ne soit pas dérivable partout, tout en faisant converger leur norme L^2 et celle de leurs dérivées premières. Ceci ne permet pas d'utiliser des résultats utiles sur les espaces de Banach comme l'existence de sous-suite convergente (faiblement) pour toute suite bornée, par exemple pour une suite minimisante de I. Nous allons donc compléter cet espace vis-à-vis de cette norme, et on obtient un premier exemple d'espace de Sobolev :

$$\begin{aligned} W_0^{1,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \quad & \text{t.q. } \nabla u \in L^2 \\ & \text{et } \exists\ (u_n) \text{ de } C_0^2(\Omega) \text{ de Cauchy pour la norme } \|\cdot\|_{1,2} \text{ avec } \|u - u_n\|_{1,2} \to 0\} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Ici l'indice $_0$ rappelle que ces fonctions sont toutes "nulles" sur le bord de l'ouvert Ω. Puisque $u \in L^2$ ceci n'a pas un sens évident à première vue, mais on peut lui en donner un en développant plus de théorie et parler plutôt de trace nulle sur $\partial\Omega$. Ce ne sera pas abordé dans ce travail mais les opérateurs de trace constituent des objets classiques dans l'étude des espaces de Sobolev, qu'on peut notamment trouver dans Adams et Fournier (2003) ; Evans (1998).

Dans ce cas $W_0^{1,2}(\Omega)$ est alors un espace de Hilbert avec produit scalaire $(u|v) = \int_\Omega u.v dx + \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx$. Ceci permet de trouver un unique minimiseur à I appartenant à cet espace de Sobolev, même en posant une "valeur" au bord.

Théorème 1.2. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert borné régulier et $w \in W^{1,2}(\Omega)$ (même définition que $W_0^{1,2}(\Omega)$ mais avec des suites de Cauchy dans $C^2(\Omega)$), on note $W_w^{1,2} := w + W_0^{1,2}(\Omega)$, alors il existe un unique $\bar{u} \in W_w^{1,2}$ minimisant l'intégrale $I(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2$.

Tous les $u \in W_w^{1,2}$ ont alors la même trace au bord, w.

Remarque : Ce Théorème est une application du résultat suivant, qui donne l'existence de minimiseurs si l'espace de définition et la fonctionnelle ont de bonnes propriétés.

Théorème 1.3. Soit $(V, \|\cdot\|)$ espace de Banach réflexif, $M \subset V$ fermé pour la topologie faible, et soit $I : M \to \mathbb{R} \cup +\infty$ coercive et (faiblement) continue inférieurement sur M, c'est à dire que

$$\begin{cases} I(u) \to \infty \qquad \text{si } \|u\| \to \infty,\ u \in M, \\ \forall\ (u_m) \text{ suite de } M \text{ telle que } u_m \rightharpoonup u \in M \text{ faiblement dans } V, \text{ on a } I(u) \leq \liminf_{m\to\infty} I(u_m). \end{cases}$$

Alors I est bornée inférieurement et atteint son minimum dans M.

C'est un premier résultat d'existence pour un problème variationnel, qui nous servira dans de nombreux autres cas. Remarquons qu'ici on a introduit un espace de Sobolev pour forcer toutes les propriétés nécessaires sur I. En revanche il n'est pas clair que le $\bar{u}$ donné par ce Théorème soit une solution dite classique, c'est à dire avec un représentant suffisamment régulier qui résolve le problème de Dirichlet.

Les espaces de Sobolev sont en réalité bien plus généraux que celui introduit ci-dessus, et sont généralement amenés en passant par des dérivées faibles :

Définition 1.4 (Dérivées faibles). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $n \geq 1$, soient ensuite $u, v \in L^1_{loc}$ et α multi-indice, on dit que $\partial^\alpha u = v$, v est la *dérivée partielle faible d'ordre* α de u si

$$\forall\ \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \int_\Omega v\varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u \partial^\alpha \varphi dx,$$

où $\partial^\alpha \varphi$ est la dérivée usuelle, i.e. si $\alpha = (\alpha_1, \dots \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| := \alpha_1 + \dots \alpha_n$,

$$\partial^\alpha \varphi = \frac{\partial^{\alpha_1} \dots \partial^{\alpha_n}}{(\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial x_n)^{\alpha_n}} \varphi.$$

Celle-ci est unique.

Exemple 1.5. Si $u \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ alors $|u|$ admet des dérivées faibles dans toutes les directions, avec

$$\partial_i (|u|) = \begin{cases} \partial_i u & \text{si } u \geq 0 \\ -\partial_i u & \text{si } u < 0 \end{cases}$$

pour $i = 1, \dots n$. Et en particulier

$$\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx = \int_\Omega |\nabla |u||^p \, dx.$$

Par intégration par parties, si $u \in C^1(\Omega)$, ses dérivées faible d'ordre 1 coïncident avec ses dérivées partielles classiques.

Définition 1.6 (Espaces de Sobolev). Soit Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq +\infty$ et $k \in \mathbb{N}$. On définit l'*espace de Sobolev* d'ordre (k, p), noté

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) :\ \forall\ |\alpha| \leq k,\ u \text{ a une dérivée faible } \partial^\alpha u \in L^p(\Omega)\},$$

on l'équipe de la norme $\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p}$

Ces espaces ont alors des propriétés très pratiques, qui expliquent leur grande utilisation. Nous omettrons les preuves des résultats suivants.

Proposition 1.7. Soit $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert,

i. $\left(W^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{k,p}}\right)$ est un espace de Banach ;

ii. Si $1 < p < \infty$, $W^{k,p}(\Omega)$ est réflexif, en particulier toute suite bornée pour la norme $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$ admet une sous-suite faiblement convergente ;

iii. Si $1 \leq p < \infty$, $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions différentiables à support compact dans $\mathbb{R}^n$ est dense dans $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$;

iv. **(Théorème de Meyers-Serrin)** Si $1 \leq p < \infty$, alors $C^\infty(\Omega)$ est dense dans $W^{k,p}(\Omega)$.

Remarque i: Par cette dernière propriété, on peut définir les espaces de Sobolev de façon équivalente par la complétion de l'espace C^∞ des fonctions différentiables, vis-à-vis de la norme de Sobolev d'ordre (k,p). En d'autres mots cette nouvelle définition de ces espaces est bien équivalente à celle de $W^{1,2}$ vue précédemment.

Remarque ii: Pour Ω borné, on n'a en revanche pas que $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $W^{k,p}(\Omega)$, de façon à ce que la définition de $W_0^{k,p}(\Omega)$ comme fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans L^p sous la norme $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$,

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \quad \text{t.q. } \forall\ |\alpha| \leq k,\ \partial^\alpha u \in L^p(\Omega) \\ \text{et } \exists\ (u_n) \text{ de } C_0^\infty(\Omega) \text{ de Cauchy avec } \|u_n - u\|_{W^{k,p}} \xrightarrow{n\to\infty} 0\} \quad (1.3)$$

soit bien différente.

L'utilité de ces espaces devient flagrante lorsqu'on cherche à résoudre des problèmes d'équations aux dérivées partielles avec valeurs nulles aux bords d'un domaine borné régulier, on remplace cette condition n'ayant plus de sens dans L^p par le fait que nos solutions doivent se trouver dans $W_0^{k,p}$.

Théorème 1.8 (Inégalité de Poincaré). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert borné régulier, alors pour $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, on a une constante $C > 0$ dépendant uniquement de p et Ω telle que

$$\left(\int_\Omega |u|^p\,dx\right)^{1/p} \leq C\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx\right)^{1/p}$$

Ceci nous permet de dire que la norme $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = (\|u\|_{L^p}^p + \|\nabla u\|_{L^p}^p)^{1/p}$ dont on a équipé $W_0^{1,p}(\Omega)$ est en fait équivalente à la nouvelle norme

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} := \left(\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx\right)^{1/p}. \quad (1.4)$$

C'est cette dernière que nous utiliserons pour ces espaces.

Remarque i: Si on en revient au Théorème 1.2, on voit qu'alors sur $W_0^{1,2}(\Omega)$, $I(u) = \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2$ ce qui nous donne la coercivité de I sur $W_w^{1,2}(\Omega)$ et nous permet en effet de trouver un minimiseur par le Théorème 1.3.

Remarque ii: Cette inégalité peut être légèrement améliorée, et on en a une forme équivalente pour un $u \in W^{1,p}(\Omega)$. On doit alors passer par la moyenne de u sur Ω,

$$\bar{u}_\Omega := \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(y)dy,$$

l'inégalité de Poincaré devient

$$\|u - \bar{u}_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq C\,\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}. \quad (1.5)$$

Le Théorème suivant est en réalité fondamental et mériterait une preuve ainsi que de plus amples discussions dans le cadre d'un cours complet d'espaces fonctionnels. Je renverrai le lecteur vers Adams et Fournier (2003) ou Evans (1998) car ici nous n'auront besoin que d'une partie du résultat. Ce Théorème a une si grande importance car il permet de démarrer de fonctions dans des espaces de

Sobolev, qui ont donc de la différentiabilité faible, et de potentiellement en tirer des dérivées au sens fort. D'autre part, le Théorème permet dans d'autres cas d'augmenter l'intégrabilité en norme L^p. Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, par définition $u \in L^p$, en fait le Théorème nous dit que pour $p < n$, u sera en fait intégrable d'exposant plus grand que p.

Théorème 1.9 (Version partielle des injections de Sobolev). Soit Ω ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $1 \leq p \leq +\infty$.

- Si $0 \leq k < n/p$, alors $W^{k,p}(\Omega)$ s'injecte dans $L^q(\Omega)$, pour $1 \leq q \leq p^*$ où $p^* = \frac{np}{n-kp}$. Autrement dit, l'inclusion

$$\left(W^{k,p}, \|\cdot\|_{W^{k,p}}\right) \hookrightarrow (L^q, \|\cdot\|_{L^q})$$

  est continue, et en particulier $\exists$ une constante K (dépendant de Ω, k, n, p) telle que

$$K \|u\|_{L^q} \leq \|u\|_{W^{k,p}} \quad \forall\ u \in W^{k,p}(\Omega).$$

  De plus, si $1 \leq q < p^*$, l'injection est compacte. Par contre en général l'injection limite $W^{k,p}(\Omega) \subset L^{p^*}$ ne l'est pas.
- Si $k > n/p$, $W^{k,p}(\Omega)$ s'injecte alors continûment dans $C^l(\overline{\Omega})$, $\forall\ 0 \leq l \leq r$, où $r = \left\lceil k - \frac{n}{p} \right\rceil - 1$. En fait l'injection se fait dans des espaces de régularité intermédiaire un peu plus forte mais nous n'en auront pas besoin.

Ces injections restent vraies et compactes si on considère les espaces $W_0^{k,p}(\Omega)$ tels que définis en (1.3). En fait on peut étendre la définition de ces espaces sur $\mathbb{R}^n$ tout entier en utilisant la nouvelle norme (1.4).

Définition 1.10. On définit l'espace de Banach

$$D^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{D^{1,p}(\Omega)}}.$$

$$\text{avec la norme } \|u\|_{D^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx\right)^{1/p}.$$

Pour Ω borné régulier c'est simplement une réécriture de $W_0^{1,2}(\Omega)$ puisque les normes sont équivalentes par Inégalité de Poincaré. En revanche pour $\Omega = \mathbb{R}^n$ c'est un nouvel espace et les normes ne sont plus équivalentes. En particulier $u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ pourrait ne pas être dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Remarque : On rappelle qu'on a $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ pour la norme $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$. Ici on complète $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ avec la norme différente $\|u\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \, dx\right)^{1/p}$.

Théorème 1.11. Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ et $1 \leq p \leq +\infty$, alors si $p < n$, $D^{1,p}$ s'injecte dans $L^{p^*}(\Omega)$ pour $p^* = \frac{np}{n-p}$, avec une constante S telle que

$$S \|u\|_{L^{p^*}} \leq \|u\|_{D^{1,p}(\Omega)} \quad \forall\ u \in D^{1,p}(\Omega).$$

En particulier si Ω est borné et régulier, et que $q < p^*$, alors $D^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ est compacte.

Théories de régularité En revenant à la question posée lors du problème de Dirichlet avec lequel on a introduit le chapitre, on se rend compte que la solution faible à $-\Delta u = 0$ est en fait C^∞, fonction harmonique classique. Avant de le montrer on a besoin d'un résultat d'estimation des normes :

Lemme 1.12. Soit $u \in C^\infty(\Omega)$, $u \in L^2$ et que u satisfait

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla \varphi \, dx = 0 \quad \forall \, \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{1.6}$$

(on dit que u est *faiblement harmonique*). Soit $R > 0$ tel que la boule de rayon R, $B(R) \subset\subset \Omega$ (c'est à dire $B(R)$ ouvert et $\overline{B}(R) \subset \Omega$), alors pour une constante dépendant de R et k

$$\|u\|_{W^{k,2}(B(R/2))} \leq C(R,k) \, \|u\|_{L^2(B(R))}$$

Preuve. On prend une boule concentrique $B(r) \subsetneq B(R)$ et une fonction "cut-off" η à support dans $B(R)$, valant 1 dans $B(r)$ et avec pente jamais trop forte : $\eta \in C_0^\infty(B(R))$, $0 \leq \eta \leq 1$ et $\eta\Big|_{B(r)} = 1$ avec $|\nabla \eta| \leq 2/(R-r)$.
On peut alors appliquer l'Équation (1.6) à $\varphi = u\eta^2 \in W^{1,2}(\Omega)$, qui reste valable puisqu'on peut dans le cas $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$ l'approcher par des fonctions lisses à support compact.

Cela nous donne $\displaystyle\int_\Omega \nabla u \left(\nabla u \eta^2 + 2u\eta\nabla\eta\right) dx = 0,$

donc $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 \eta^2 dx \leq 2\int_\Omega |u|\,\eta\,|\nabla u|\,|\nabla\eta|\,dx \leq 2\left(\int_\Omega |u|^2\,|\nabla\eta|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega \eta^2\,|\nabla u|^2\,dx\right)^{1/2}$ par Hölder

$\Leftrightarrow \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 \eta^2 dx \leq 4\int_\Omega |u|^2\,|\nabla\eta|^2\,dx$

$\Rightarrow \displaystyle\int_{B(r)} |\nabla u|^2\,dx \leq \int_\Omega |\nabla u|^2\eta^2 dx \leq 4\int_\Omega |u|^2\,|\nabla\eta|^2\,dx \leq \frac{16}{(R-r)^2}\int_\Omega |u|^2\,dx.$

Si $u \in C^\infty$, les dérivées d'ordres supérieurs sont aussi harmoniques par intégration par parties et on peut répéter l'argument,

$$\int_{B(r_2)} \left|\nabla^2 u\right|^2 dx \leq C_1 \int_{B(r_1)} |\nabla u|^2\,dx \leq C_2 \int_{B(R)} |u|^2\,dx \tag{1.7}$$

et donc par récurrence en prenant une suite de rayons $R/2 \leq r_k < \ldots r_1 < R$ on a

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \quad \int_{B(R/2)} \left|\nabla^k u\right|^2 dx \leq C(R,k) \int_{B(R)} |u|^2\,dx \tag{1.8}$$

où on note par abus de notation $\left|\nabla^k u\right|^2 := \sum_{|\alpha|=k} (\partial^\alpha u)^2$. Autrement dit on a

$$\|u\|_{W^{k,2}(B(R/2))} \leq C(R,k)\,\|u\|_{L^2(B(R))}\,. \tag{1.9}$$

□

Théorème 1.13 (Lemme de Weyl). Soit Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, si $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ (localement L^2) est solution faible de l'équation de Laplace $\Delta u = 0$, alors $u \in C^\infty(\Omega)$.

Preuve. Par définition u est solution faible si

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla\varphi = 0 \quad \forall\ \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{1.10}$$

On va maintenant appliquer un raisonnement classique, en approchant u par des estimations régulières pour utiliser le Lemme précédent. On prend $\phi \in C_0^\infty(B(0,1))$ avec $\int \phi = 1$, $\phi \geq 0$, et on approche u par convolution avec $\phi_\varepsilon(y) := \varepsilon^{-n}\phi(y/\varepsilon)$,

$$u_\varepsilon(x) := u * \phi_\varepsilon(x) = \int u(x-y)\phi_\varepsilon(y)dy.$$

L'intérieur de l'intégrale est non-nul seulement si $x - y \in \Omega$, $y \in B(0,\varepsilon)$, de façon à ce que $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ où $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$ sont tous les points à distance au moins ε du bord.
On trouve ensuite que les u_ε sont harmoniques dans cet ensemble, en effet si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\varepsilon)$,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon(x)\nabla\varphi(x)dx &= \int_{\Omega_\varepsilon}\left(\int \nabla_x u(x-y)\phi_\varepsilon(y)dy\right)\nabla\varphi(x)dx \\ &= \int\left(\int_\Omega \nabla u(x)\nabla_x\varphi(x+y)dx\right)\phi_\varepsilon(y)dy = 0.\end{aligned}$$

Puisque si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\varepsilon)$, quel que soit $y \in B(0,\varepsilon)$ $\varphi(\cdot + y) \in C_0^\infty(\Omega)$. On peut alors utiliser le Lemme 1.12 et on a $\|u_\varepsilon\|_{W^{k,2}(B(R/2))} \leq C\|u_\varepsilon\|_{L^2(B(R))}$ pour $k = 1, 2, \ldots$.
Mais on sait que $u_\varepsilon \to u$ dans $L^2(B(R))$, et grâce au Lemme précédent d'estimation, u_ε est une suite de Cauchy aussi pour la norme $\|\cdot\|_{W^{k,2}}$. Par complétude de l'espace on a donc la convergence forte dans $W^{k,2}$ vers une certaine fonction $u_0 \in W^{k,2}(B(R/2)$. La convergence du produit de convolution dans L^2 donne forcément $u_0 = u$ donc $u \in W^{k,2}(B(R/2))$ pour $k = 1, 2, \ldots$, et en passant à la limite $\|u\|_{W^{k,2}(B(R/2))} \leq C\|u\|_{L^2(B(R))}$. Par injection de Sobolev, à partir d'un $k > n/2$, on conclu $u \in C^\infty(B)$ pour toute boule incluse dans Ω, donc au final $u \in C^\infty(\Omega)$. □

Le problème de Dirichlet $\begin{cases} -\Delta u = 0 \\ u\Big|_{\partial\Omega} = g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\Delta u = 0 \\ u \in W^{1,2}_w(\Omega) \end{cases}$ a donc des solutions classiques.

En fait si on a un $h \in W^{1,2}_w(\Omega)$ tel que $-\Delta h = f \in L^2(\Omega)$ (donc $h \in W^{2,2}(\Omega)$), alors le problème de Dirichlet homogène se réécrit une fois de plus

$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ u \in W_0^{1,2}(\Omega) \end{cases} \quad \text{(avec } u = \tilde{u} - h,\ \tilde{u} \text{ harmonique)}. \tag{1.11}$$

Une solution faible à ce problème, dit problème de Poisson, est u tel que $\forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\int_\Omega \nabla u.\nabla\varphi = \int_\Omega f\varphi$. De par ce qu'on a dit plus tôt elle possède une solution faible, et on pourrait encore développer un lien entre la régularité de f et de la solution u associée. Le lecteur pourra se référer aux démonstrations du cours de Premoselli (2020-2021) pour les détails menant au résultat.

Théorème 1.14 (Régularité $W^{k,p}$ jusqu'au bord). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert borné régulier, $n \geq 3$. Prenons $1 < p < \infty$ et $k \geq 0$, si $f \in W^{k,p}(\Omega)$ et $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ solution faible de

$$-\Delta u = f,$$

alors $u \in W^{k+2,p}(\Omega)$. Et en particulier on a une constante $C > 0$ telle que

$$\|u\|_{W^{k+2,p}(\Omega)} \leq C \|f\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

On retrouve en particulier que si $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, comme dans le cas du problème de Dirichlet homogène avec $f \equiv 0$, $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ par injections de Sobolev. Le Lemme de Weyl est donc un cas restreint très particulier.

Equations d'Euler-Lagrange : Pour résoudre le problème de Dirichlet homogène, on a accepté le fait que résoudre l'équation

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{sur } \Omega \\ u \in W_w^{1,2}(\Omega) \end{cases} \tag{1.12}$$

au sens faible, i.e. $\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = 0 \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, correspond au fait de minimiser l'intégrale

$$I(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \quad \text{sur } W_w^{1,2}. \tag{1.13}$$

Dans ce cas on remarque qu'en faisant varier I dans une direction $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\frac{I(u+t\varphi) - I(u)}{t} = 2\int_\Omega \nabla u.\nabla\varphi dx + t\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 \, dx \xrightarrow{t\to 0} 2\int_\Omega \nabla u.\nabla\varphi dx \tag{1.14}$$

On peut donc justifier l'équivalence car dans un certain sens les propriétés des minima locaux pour les fonctions $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s'étendent de la même manière pour des espaces fonctionnels infinidimensionnels. Si u minimise I, il est un point critique de la fonctionnelle, et la dérivée de I en u, $DI(u) = 0 \ \Leftrightarrow \ -\Delta u = 0$ par définition de ce que signifie $-\Delta u = 0$ faiblement.

Pour mettre de la rigueur dans les affirmations ci-dessus, il nous faut donc introduire le concept de dérivée directionnelle pour une fonctionnelle.

Définition 1.15. Soit X un espace de Banach, et $I : X \to \mathbb{R}$ fonctionnelle tout à fait générale. On appellera dérivée directionnelle de I en $u \in X$ dans la direction $h \in X, \ h \neq 0$

$$D_h I(u) = \lim_{t\to 0} \frac{I(u+th) - I(u)}{t}.$$

On dira que I est différentiable (au sens de Gateaux) en $u \in X$ si $\forall h \in X, \ h \neq 0$, la dérivée directionnelle $D_h I(u)$ existe, et que l'application $h \mapsto D_h I(u)$ est linéaire et continue. Ceci définit une fonction $DI(u) \in X'$ dual de X par

$$D_h I(u) = \langle DI(u), h \rangle.$$

On appelle $DI(u)$ la (G-)différentielle de I en u.

On peut alors étendre aisément la démonstration du cas réel pour avoir le résultat suivant.

Théorème 1.16. Si $I : X \to \mathbb{R}$ est G-différentiable et que $I(u_0) = \inf_{u\in X} I(u)$, alors $DI(u_0) = 0$.

Ceci permet d'associer naturellement les problèmes d'équations différentielles avec des problèmes de recherche de points critiques d'une certaine fonctionnelle dans un espace de Banach. Il s'agit de la justification derrière l'utilisation de techniques de méthodes variationnelles pour trouver des solutions aux EDP.

Application : On va utiliser la théorie développée à ce chapitre pour trouver une solution à un problème semi-linéaire sous-critique homogène, qui nous servira tout au long de ce travail. Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domaine borné et régulier, $p < \frac{2n}{n-2} =: 2^*$ l'exposant limite de l'injection de Sobolev, on cherche $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ solution de

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = u\,|u|^{p-2} & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad \text{pour } \lambda \in \mathbb{R} \tag{1.15}$$

Avant de commencer, et puisqu'on en aura besoin, rappelons que l'opérateur $-\Delta$ a des valeurs propres sur $W_0^{1,2}$, i.e. on a des solutions $\bar{u}^i \neq 0 \in W^{1,2}(\Omega)$, associées à des $\lambda_i \geq 0$ telles que

$$-\Delta \bar{u}^i = \lambda_i \bar{u}^i. \tag{1.16}$$

De plus la suite $(\lambda_0 = 0, \lambda_1, \ldots)$ est strictement croissante et tend vers l'infini, et on peut caractériser ces valeurs propres (voir Druet, 2005, p.107).

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u\neq 0 \\ u\in W^{1,2}(\Omega)}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx}{\int_\Omega |u|^2\,dx} \tag{1.17}$$

puis successivement si on note

$\mathcal{E}^i$ l'espace des fonctions propres associées à λ_i (de dimension finie), et

$$\mathcal{H}^i := \left\{ u \neq 0 \in W^{1,2}(\Omega) \text{ tq } \int_\Omega uv dx = 0\ \forall v \in \sum_{k=0}^{i-1} \mathcal{E}^i \right\}. \tag{1.18}$$

Alors $\lambda_i = \inf_{u\in\mathcal{H}^i} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx}{\int_\Omega |u|^2\,dx}$.

Remarque : On voit directement que toutes les valeurs propres sont bien positives, puisque par définition, un $\bar{u}^i$ est fonction propre ssi

$$\int_\Omega \nabla \bar{u}^i \nabla v dx = \lambda_i \int_\Omega \bar{u}^i v dx \quad \forall\ v \in C^\infty(\Omega). \tag{1.19}$$

Par densité ça reste vrai pour $v \in W^{1,2}(\Omega)$, et donc en prenant $v = \bar{u}^i$, on a $\int_\Omega \left|\nabla \bar{u}^i\right|^2 dx = \lambda_i \int_\Omega \left|\bar{u}^i\right|^2 dx$ donc $\lambda_i \geq 0$.

Pour le moment nous savons lier une fonctionnelle à son EDP associée, qu'on appelle équation d'Euler-Lagrange pour la fonctionnelle, et on a le Théorème 1.3 qui nous donne l'existence de minimiseurs dans certains cas. On va essayer de l'utiliser en passant par la minimisation d'une fonctionnelle sous contraintes, pour montrer l'existence d'une solution au problème dans le cas sous-critique $p < 2^*$.

Théorème 1.17. Soit Ω domaine borné et régulier de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ et $2 < p < 2b$. Alors $\forall \lambda > -\lambda_1$ $\lambda \in \mathbb{R}$, le problème (1.15) a une solution faible positive $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Preuve. On commence par remarquer que (1.15) est l'équation d'Euler-Lagrange associée à la fonctionnelle

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + \lambda |u|^2\right) dx - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p \, dx \tag{1.20}$$

sur $W_0^{1,2}(\Omega)$. Cette fonctionnelle n'est pas bornée ni coercive sur cet espace, et il sera impossible d'en trouver une solution par simple minimisation. En revanche, via un argument d'homogénéité, un point critique de I résout aussi le problème de minimisation sous contrainte pour

$$E(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + \lambda |u|^2\right) dx \text{ sur } M := \{u \in W_0^{1,2}(\Omega) : \int_\Omega |u|^p \, dx = 1\}. \tag{1.21}$$

Vérifions que ce problème variationnel peut être résolu en utilisant le Théorème 1.3. D'une part on sait par le Théorème 1.11 que l'injection de $W_0^{1,2}(\Omega)$ dans L^p est compacte et continue, de sorte que M est fermé pour la topologie faible dans $W_0^{1,2}(\Omega)$.

En utilisant l'estimation pour la première valeur propre du laplacien,

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u \neq 0 \\ u \in W^{1,2}(\Omega)}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx}{\int_\Omega |u|^2 \, dx} \tag{1.22}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad E(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} && \text{si } \lambda \geq 0 \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} \left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) && \text{si } \lambda < 0. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Cela donne la coercivité de E si $\lambda \geq -\lambda_1$.

D'autre part la semi-continuité de E vient de la semi-continuité de la norme $W_0^{1,2}(\Omega)$ et donc par le Théorème 1.3 on sait que E atteint son infimum en une fonction $\bar{u} \in M$. Comme de plus $E(u) = E(|u|)$, on peut supposer $\bar{u} \geq 0$. On peut ensuite vérifier que cette fonction $\bar{u}$ donne bien lieu à une solution du problème initial (1.15), on utilise la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Cette dernière est bien connue pour les problèmes de minimisation sous contraintes dans $\mathbb{R}^n$, et s'étend de la même manière à notre problème infini-dimensionnel. Si $\bar{u}$ réalise le minimum de E sous la contrainte $G(u) = \int_\Omega |u|^p \, dx - 1 = 0$, alors il doit y avoir $\mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned} & DE(\bar{u}) = \mu DG(\bar{u}) \\ \Leftrightarrow \ & \langle v, DE(\bar{u} - \mu DG(\bar{u})\rangle = 0 \qquad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega), \\ \text{avec } & \begin{cases} \langle DE(u), v\rangle = \displaystyle\int_\Omega (\nabla u \nabla v + \lambda uv)\, dx; \\ \langle DG(u), v\rangle = p\displaystyle\int_\Omega u\,|u|^{p-2}\, v dx. \end{cases} \\ \text{Et donc } & \int_\Omega (\nabla \bar{u} \nabla v + \lambda \bar{u} v)\, dx - \mu p \int_\Omega \bar{u}\,|\bar{u}|^{p-2}\, v dx = 0 \end{aligned}$$

En appliquant cette dernière relation en $v = \bar{u}$ on trouve $\mu p = 2E(\bar{u})$, et donc en posant $\tilde{u} := \mu^\alpha \bar{u}$ on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\nabla\tilde{u}\nabla v + \lambda\tilde{u}v)\,dx &= \mu^\alpha \left(\int_\Omega (\nabla\bar{u}\nabla v + \lambda\bar{u}v)\,dx\right) \\ &= \mu^\alpha \left(\mu p \int_\Omega \bar{u}\,|\bar{u}|^{p-2}\,v dx\right) \\ &= \mu^{\alpha+1-(p-1)} p \left(\int_\Omega \tilde{u}\,|\tilde{u}|^{p-2}\,v dx\right).\end{aligned} \tag{1.24}$$

Pour α tel que $\left(\frac{2E(\bar{u})}{p}\right)^{\alpha-p+2} = \frac{1}{p}$, $\tilde{u} \geq 0$ sera donc solution du problème initial, satisfaisant

$$\begin{cases} -\Delta\tilde{u} + \lambda\tilde{u} = \tilde{u}\,|\tilde{u}|^{p-2} & \text{sur } \Omega \\ \tilde{u} \in W_0^{1,2}(\Omega). \end{cases} \tag{1.25}$$

□

Pour enfin obtenir $u \in C^2(\Omega)$ et pouvoir conclure, on procède en appliquant une méthode dite de *Bootstrap*, en utilisant le Théorème 1.14 de régularité.

Lemme 1.18. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domaine borné et régulier de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Soit $2 < p < 2^*$, si on a une solution faible $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ à l'équation

$$-\Delta u + \lambda u = u\,|u|^{p-2} \qquad \text{sur } \Omega,$$

alors $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}$.

Preuve. On commence avec $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ par injections de Sobolev, avec $2^* = \frac{2n}{n-2}$. Mais alors

$$\begin{cases} \lambda u \in L^{2^*}(\Omega) \\ u\,|u|^{p-2} \in L^{\frac{2^*}{p-1}}(\Omega) \end{cases}$$

et donc $-\Delta u = u\,|u|^{p-2} - \lambda u \in L^{2^*/(p-1)}(\Omega)$. Posons $q_0 := \frac{2^*}{p-1} > 1$, par le Théorème de régularité 1.14, avec $k = 0$ ($W^{0,q_0}(\Omega) = L^{q_0}(\Omega)$) on obtient $u \in W^{2,q_0}(\Omega)$. Il y a alors deux possibilités.

- Si $q_0 > \frac{n}{2}$, les injections de Sobolev nous donnent $W^{2,q_0}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$. On a donc $u \in C^0(\overline{\Omega})$, $-\Delta u = u\,|u|^{p-2} - \lambda u \in C^0(\overline{\Omega})$ et enfin $u \in C^2(\Omega)$.
- Sinon, $q_0 < \frac{n}{2}$ et cette fois $W^{2,q_0} \hookrightarrow L^{\frac{nq_0}{n-2q_0}}(\Omega)$, $\frac{nq_0}{n-2q_0} = \frac{2^* n}{n(p-1)-2.2^*}$. On observe alors que $-\Delta u = u\,|u|^{p-2} - \lambda u \in L^{q_1}(\Omega)$, avec $q_1 := \frac{2^* n}{n(p-1)-2.2^*}\frac{1}{p-1} > q_0$ pour $p < 2^*$. En utilisant une fois de plus le Théorème de régularité on arrive à $u \in W^{2,q_1}(\Omega)$.
  On revient alors aux deux possibilités, soit $q_1 > \frac{n}{2}$, et $W^{2,q_1} \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$, $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, soit on pose $q_2 = \frac{nq_1}{n-2q_1}\frac{1}{p-1} > q_1$ et on recommence.

On obtient donc dans le pire des cas une suite croissante de $q_n = \frac{nq_{n-1}}{n-2q_{n-1}}\frac{1}{p-1}$, or ils tendent vers l'infini pour $p < 2^*$ en démarrant avec $q_0 = 2^*/(p-1)$, et donc après un nombre fini de telles étapes la procédure s'arrête et on aura conclu $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. □

1.2 Méthodes de Minimax

Comme on l'a vu dans la section précédente, pour résoudre une équation différentielle aux dérivées partielles une méthode classique est de passer par la recherche de points critiques à une fonctionnelle dans un certain espace satisfaisant les conditions aux bords. Pour ce faire on peut utiliser la compacité faible de l'espace de Banach V, la continuité (faible inférieure) de la fonctionnelle I ainsi que sa coercivité. Ceci a des chances d'aboutir si le point critique est minimum (ou maximum) au moins localement, en revanche d'autres solutions pourraient se trouver aux points de selle de la fonctionnelle, et pour en démontrer l'existence il faudra passer par la résolution de problèmes de minimax (c'est à dire impliquant l'infimum d'un suprémum). Ces méthodes qui sont plus complexes sur des espaces fonctionnels permettront en outre de montrer l'existence de solutions dans le cas où la fonctionnelle ne serait ni bornée inférieurement ni supérieurement et ne posséderait pas de point critique localement minimum ou maximum.

Dans cette sections nous développerons donc un Théorème d'existence de tels points critiques, appelé Théorème du col (ou "Mountain Pass Theorem"). Elle est tirée de Struwe (2008, chapitre II).

En dimension finie : Pour commencer, nous verrons brièvement un résultat similaire valable lorsque l'espace de définition est de dimension finie (essentiellement $\mathbb{R}^n$). Il nous dit que lorsqu'on connaît déjà deux minima locaux, on peut trouver un troisième point critique en se baladant entre ces deux points et en trouvant le chemin qui s'élève le moins parmis tous les chemins possibles.

Théorème 2.1. Soit $I \in C^1(\mathbb{R}^n)$ coercive, avec deux minima locaux stricts distincts x_1, x_2. Alors I a un troisième point critique x_3 qui n'est pas minimiseur local de I, et

$$I(x_3) = \inf_{p \in P} \max_{x \in p} I(x)$$

où $P := \{p \subset \mathbb{R}^n : \ x_1, x_2 \in p \text{ où } p \text{ est compact et connexe}\}$.

La collection P est en quelque sorte l'ensemble de tous les chemins liant x_1 à x_2 puisque tout chemin est compact et connexe et que tout $p \in P$ contient en particulier un chemin joignant ces extrémités.

Preuve. Commençons par montrer qu'un $p \in P$ atteint cet infimum, prenons $(p_m)_{m \in \mathbb{N}}$ suite minimisante de P,

$$\max_{x \in p_m} I(x) \xrightarrow{m \to \infty} \inf_{p \in P} \max_{x \in p} I(x) =: \beta.$$

D'une part on sait que tout chemin est un sous-ensemble fermé et connexe de $\mathbb{R}^n$, et comme I est coercive, on sait que les p_m sont forcément bornés. Donc

$$p := \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{l \geq m} \overline{p_l} \tag{2.1}$$

l'ensemble des points d'accumulation des chemins (p_m), p est l'intersection d'une suite décroissante d'espaces compacts et connexes (puisque dans $\mathbb{R}^n$ et que chaque chemin est connexe et deux chemins se joignent au moins en x_1, x_2). L'ensemble p est donc compact et connexe, et $x_1, x_2 \in p$, $p \in P$. On

se rend alors compte que $p \in P$ réalise l'infimum. D'une part $p \in P$ donc $\max_{x\in p} I(x) \geq \beta$; D'autre part par continuité de I,

$$\max_{x\in p} I(x) \leq \limsup_{m\to\infty} \left(\max_{x\in p_m} I(x) \right) = \beta \tag{2.2}$$

et donc $\max_{x\in p} I(x) = \beta$.

Reste à voir qu'il y a bien un point critique $x_3 \in p$ tel que $I(x_3) = \beta$ qui ne soit pas minimum local. Par continuité de I et compacité de p, $K := \{x \in p : \ I(x) = \beta\}$ est compact, supposons $DI(x) \neq 0 \ \forall \ x \in K$. Alors $\exists \delta > 0$ tel que

$$|DI(x)| > \delta \quad \forall \ x \in K,$$

on va essayer de descendre le long de ce gradient autour des points dans K pour trouver un chemin proche qui contredira p infimum, autrement dit on voudrait prendre $\Phi(x,t) = x - t \ \nabla I(x)$ pour $x \in K$, où le gradient $\nabla I(x) \in \mathbb{R}^n$ est défini par $\nabla I(x).v = DI(x)v \ \forall \ v \in \mathbb{R}^n$. Pour que $\Phi(p)$ reste un chemin continu, on prend η fonction "cut-off" continue à support dans

$$K_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \exists \ y \in K \text{ avec } \ |x-y| < \varepsilon \text{ et } \ |DI(x)| \geq \delta/2\},$$

avec $0 \leq \eta \leq 1$ et $\eta \equiv 1$ dans un voisinage de K inclu dans K_ε, et on définit

$$\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n : \Phi(x,t) := x - \eta(x).t \ \nabla I(x). \tag{2.3}$$

On voit que Φ va bien faire décroître l'énergie,

$$\frac{d}{dt} I(\Phi(x,t))\Big|_{t=0} = - \langle \eta(x) \nabla I(x), DI(x) \rangle = -\eta(x) \left|\nabla I(x)\right|^2 < 0,$$

et donc $\exists \ T > 0$ tel que $\forall \ x$

$$\frac{d}{dt} I\left(\Phi(x,t)\right) \leq -\frac{\eta(x)}{2} \left|\nabla I(x)\right|^2 \quad \forall \ t \in [0,T]. \tag{2.4}$$

Prenons donc le chemin auxiliaire $\tilde{p} = \{\Phi(x,T) : \ x \in p\}$, pour lequel $\forall \ y = \Phi(x,T) \in \tilde{p}$

$$I(y) = I(\Phi(x,T)) = I(x) + \int_0^T \frac{d}{dt} I(\Phi(x,t)) dt \leq I(x) - \frac{T}{2} \eta(x) \left|\nabla I(x)\right|^2 \tag{2.5}$$

Or si $x \notin K_\varepsilon$, $\eta(x) = 0$ et $I(y) \leq I(x) < \beta$ (puisque β est le maximum sur tout p, atteint dans K) ; et si $x \in K_\varepsilon$, $\eta(x) \geq 0, \left|\nabla I(x)\right|^2 \geq \delta^2/4$, donc

$$I(y) \leq I(x) - \frac{T}{2}.\frac{\delta^2}{4} < \beta.$$

On a $\max_{x\in\tilde{p}} < \beta$, mais par continuité de Φ, $\tilde{p}$ est un chemin liant x_1 à x_2, puisque clairement $x_1, x_2 \notin K_\varepsilon$, donc $\tilde{p} \in P$ ce qui contredit la définition de β comme infimum. Certains $x \in K$ sont donc points critiques.

Enfin il reste à montrer que tous les points trouvés ci-dessus, qu'on regroupe dans

$$\tilde{K} = \{x \in p : \ I(x) = \beta \text{ et } DI(x) = 0\},$$

ne sont pas minima locaux. Sinon, puisque $\forall x \in \tilde{K}$, $I(x) = \beta = \max_{x\in p} I(x)$ cela signifierait $p = \tilde{K}$, mais ceci contredit le fait que x_1 et x_2 soient minima stricts, puisqu'on pourrait se déplacer de l'un à l'autre en suivant un chemin à élévation minimale constante β.

Donc il existe forcément $x_3 \in p$ tel que $I(x_3) = \beta = \inf_{p\in P} \max_{x\in p} I(x)$ point critique mais pas minimiseur local de I. □

Condition de Palais-Smale : Dans le résultat précédent, on a utilisé une forme de compacité de I en la supposant coercive et C^1 pour trouver des points de selle. En dimension finie en effet on a l'avantage d'avoir que si $I(u_m)$ est bornée, alors il existe une sous-suite convergente (fortement). En dimension infinie, pour utiliser des arguments similaires il nous faudrait supposer I opérateur compact, i.e. avoir des bornes sur l'énergie. Pourtant, on aimerait pouvoir résoudre des problèmes de minimax sur des fonctionnelles plus générales, et en fait la compacité requise est plus faible. Par la suite nous noterons V espace de Banach.

Définition 2.2 (Suite de Palais-Smale). Soit $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ suite de V, elle est dite de *Palais-Smale* pour I si $\exists\ c$ tel que $|I(u_m)| \leq c\ \forall\ m \in \mathbb{N}$ et $\|DI(u_m)\| \xrightarrow{m\to\infty} 0$.

Définition 2.3. On dit que I satisfait la *condition de Palais-Smale* (P-S) si toute suite de Palais-Smale pour I admet une sous-suite fortement convergente.

Regardons quelques résultats de fonctionnelles satisfaisant cette condition.

Proposition 2.4.

i. Si $I \in C^1(\mathbb{R}^n)$ et $\|DI\| + |I| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est coercive, alors I satisfait (P-S) .

ii. Si $I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est un polynôme de la forme $I(x) = \sum_{ij} a_{ij}x_ix_j + \sum_i b_ix_i + c$, que (a_{ij}) définit une matrice inversible, alors I satisfait (P-S) .

iii. Si I est telle que toute suite de Palais-Smale est bornée, et que $\forall\ u \in V$, $DI(u) : V \to \mathbb{R}$ se décompose en

$$DI(u) = Lu + K(u)$$

où $L : V \to V'$ est une application linéaire inversible fixée, et K est un opérateur qui envoie des sous-ensembles bornés de V sur des sous-ensembles relativement compacts de V'. Alors I satisfait (P-S) .

Preuve. (iii) Par hypothèse toute suite (u_m) de (P-S) est bornée, avec

$$\|DI(u_m)\| = \|Lu_m + K(u_m)\| \to 0$$
$$\Leftrightarrow u_m = -L^{-1}K(u_m) + r_m, \quad \text{avec } r_m \to 0 \text{ reste.}$$

Mais comme u_m est bornée, $(K(u_m))$ est relativement compact et converge à sous-suite près, et donc $L^{-1}K(u_m)$ aussi et u_m admet donc une sous-suite fortement convergente. □

Remarque : Par cette condition de Palais-Smale, on sait que

$$K_\beta := \{u \in V :\ I(u) = \beta \text{ et } DI(u) = 0\} \tag{2.6}$$

l'ensemble des points critique à niveau d'énergie β est compact. On définira également pour la suite $E_\beta := \{u \in V :\ I(u) < \beta\}$.

Mountain pass theorem : Comme on l'a dit, on veut étendre les résultats de minimax aux espaces de dimension infinie, et pour cela on a le Théorème du col qui possède de nombreuses variantes qu'on ne discutera pas davantage. Avant de l'énoncer on aura besoin d'un Lemme, dit de déformation, qui étend la définition de Φ du Théorème 2.1. Ce Lemme nous donnera une telle fonction qui déforme continûment des chemins en descendant la pente de I autour des points à niveau d'énergie β.

Lemme 2.5 (de déformation). Soit $I \in C^1(V)$ satisfaisant (P-S) , et soient $\beta \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon_0 > 0$ fixés. Prenons N voisinage quelconque de K_β, alors $\exists\ 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ et une famille $(\Phi(\cdot,t), t \geq 0)$ à un paramètre d'homéomorphismes de V avec

- Φ se comporte comme un semi-groupe, $\Phi(\cdot,0) = id$, $\Phi(\cdot,t) \circ \Phi(\cdot,s) = \Phi(\cdot,t+s)\ \forall\ t,s \geq 0$,
- $\Phi(u,t) = u$ si $DI(u) = 0$ ou que $|I(u) - \beta| \geq \varepsilon_0$,
- $I(\Phi(,t))$ est non-croissant en $\forall\ u \in V$,
- $\Phi(E_{\beta+\varepsilon} \setminus N, 1) \subset E_{\beta-\varepsilon}$ et $\Phi(E_{\beta+\varepsilon}, 1) \subset E_{\beta-\varepsilon} \cup N$.

Remarque : On voit que si $K_\beta = \emptyset$, en prenant le voisinage $N = \emptyset$, on trouve un Φ tel que si $I(u) < \beta + \varepsilon$, alors $I(\Phi(u,1)) < \beta - \varepsilon$, on obtient une diminution stricte de l'énergie autour des points de niveau β.

Théorème 2.6 (Mountain pass). Soit $I \in C^1(V)$ satisfaisant (P-S) , si

- $I(0) = 0$,
- $\exists\ \rho > 0,\ \alpha > 0$ tels que $\forall\ \|u\| = \rho,\ I(u) \geq \alpha$,
- $\exists\ u_1 \in V$ tel que $\|u_1\| \geq \rho$ et $I(u_1) < \alpha$,

alors en définissant $P = \{p \in C^0([0,1]; V) :\ p(0) = 0,\ p(1) = u_1\}$ ensemble des chemins liant $u_0 = 0$ à u_1, on a

$$\inf_{p \in P} \sup_{u \in p} I(u) \geq \alpha$$

est atteint en un point critique de I.

Preuve. Notons $\beta = \inf_{p \in P} \sup_{u \in p} I(u)$, prouver le Théorème revient à montrer que K_β n'est pas vide. Supposons donc par l'absurde que $K_\beta = \emptyset$, on choisit $\varepsilon_0 = \min\{\alpha, \alpha - I(u_1)\}$ et on prend un voisinage $N = \emptyset$, le Lemme de déformation nous donne un ε et Φ.

Par définition de β infimum, $\exists p \in P$ tel que $\sup_{u \in p} I(u) < \beta + \varepsilon$, notons donc $p_1 = \Phi(p,1)$. Par le choix de ε_0, il est aisé de vérifier que

$$|I(u_0) - \beta| \geq \varepsilon_0 \qquad |I(u_1) - \beta| \geq \varepsilon_0$$

de sorte que $\Phi(\cdot,t)$ fixe 0 et u_1. Mais alors $p_1 \in P$, et comme on l'a remarqué juste avant, dans ce cas $K_\beta, N = \emptyset$ et $\Phi(E_{\beta+\varepsilon}, 1) \subset E_{\beta-\varepsilon}$,

$$\sup_{u \in p_1} I(u) = \sup_{u \in p} I(\Phi(u,1)) < \beta - \varepsilon$$

ce qui contredit β infimum sur tous les $p \in P$. □

Application : Nous allons dès lors nous intéresser à une application de ce Théorème à un problème d'EDP avec valeur aux bords. Nous revenons au problème discuté au Théorème 1.17, la méthode minimax nous permettra d'obtenir des solutions à

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = u\,|u|^{p-2} & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega,\ u \in C^2(\Omega \subset \mathbb{R}^n; \mathbb{R}) \end{cases} \tag{2.7}$$

sans passer par la minimisation. Avec une fois de plus Ω domaine borné régulier, $n \geq 3$, $2 < p < p^* = \frac{2n}{n-2}$ et pour $\lambda \geq -\lambda_1$ valeur propre du laplacien.

Preuve (alternative au Théorème 1.17). Comme on l'avait déjà dit, de façon classique on passe par la fonctionnelle

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u|^2\,dx - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p\,dx \tag{2.8}$$

définie sur $W_0^{1,2}(\Omega)$, liée à (2.7) par les équations d'Euler-Lagrange. Avant de commencer, remarquons que sur $\mathbb{R}$, on a toujours deux constantes $C, D > 0$ telles que à λ fixé,

$$\left|\lambda t - t\,|t|^{p-2}\right|^{\frac{p}{p-1}} \leq C + D\,|t|^p \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \tag{2.9}$$

ça nous sera utile pour la suite. Essayons d'utiliser le Théorème précédent.

Tout d'abord $I \in C^1$, montrons qu'elle satisfait (P-S) , et pour ça on va utiliser la proposition 2.4 (iii). Soit (u_m) suite de Palais-Smale pour I, on a $I(u_m) \leq c\ \forall m \in \mathbb{N}$ et $DI(u_m) = o(1)$ dans le sens que $|DI(u_m)| \xrightarrow{m\to\infty} 0$. Or

$$\begin{aligned}
I(u_m) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_m|^2\,dx + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u_m|^2\,dx - \frac{1}{p}\int_\Omega |u_m|^p\,dx \\
&= \frac{1}{2}\|u_m\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u_m|^2\,dx - \frac{1}{p}\int_\Omega |u_m|^p\,dx \leq c \\
\langle DI(u_m), v\rangle &= \int_\Omega \nabla u_m.\nabla v dx + \lambda\int_\Omega u_m v dx - \int_\Omega |u_m|^{p-2}\,u_m v dx = o(1)\,\|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \\
\text{donc } \langle DI(u_m), u_m\rangle &= \int_\Omega |\nabla u_m|^2\,dx + \lambda\int_\Omega |u_m|^2\,dx - \int_\Omega |u_m|^p\,dx = o(1)\,\|u_m\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}\,.
\end{aligned}$$

En mettant tout ceci ensemble on a à la fois

$$\begin{aligned}
p.I(u_m) - \langle DI(u_m), u_m\rangle &\leq C + o(1)\,\|u_m\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \\
\text{et} \qquad &= \frac{p-2}{2}\|u_m\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} + \lambda\frac{p-2}{2}\int_\Omega |u_m|^2\,dx \\
&\geq \frac{p-2}{2}\|u_m\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} && \text{si } \lambda \geq 0 \\
&\geq \frac{p-2}{2}\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\|u_m\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} && \text{si } \lambda < 0
\end{aligned}$$

Donc (u_m) est bornée si $\lambda \geq -\lambda_1$. Enfin, en définissant

$$K : W_0^{1,2}(\Omega) \to \left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)' : u \mapsto \left[\lambda u - u\,|u|^{p-2}\right], \tag{2.10}$$

cette application est telle que, en utilisant Hölder et que $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
\langle K(u), v\rangle &= \int_\Omega (\lambda uv - |u|^{p-2}\,uv)dx \leq \left(\int_\Omega (\lambda u - u\,|u|^{p-2})^{\frac{p}{p-1}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_\Omega |v|^p\right)^{1/p} \\
&\leq (C + D\int_\Omega |u|^p)^{\frac{p-1}{p}}\,\|v\|_{L^p(\Omega)}\,.
\end{aligned}$$

Par compacité des injections, on a que K envoie des bornés de L^p sur des bornés de $(L^p)' \subset (W_0^{1,2}(\Omega))'$, donc sur des compacts. On peut enfin conclure, de par la forme de $DI(u) = -\Delta u + K(u)$, I satisfait Palais-Smale par 2.4 (iii).

On va donc utiliser le Théorème du col, puisque $I(0) = 0$. On a également

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u|^2\,dx - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p\,dx \\ &\geq \frac{1}{2}\min\left(1, 1+\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\|u\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p \end{aligned}$$

On rappelle également que l'injection étant continue on avait une constante $K > 0$ telle que $K\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}$, donc

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\left(\min\left(1, 1+\frac{\lambda}{\lambda_1}\right) - \frac{1}{p}\|u\|^{p-2}_{W_0^{1,2}(\Omega)}\right)\|u\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} \geq \alpha > 0 \tag{2.11}$$

si on prend un u de norme suffisamment petite ρ telle que $\rho^{\,p-2} < \frac{p}{2} + \min(0, \lambda/\lambda_1)$.

Enfin, en partant d'un $u \neq 0$, de norme $\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} =: U_1$ finie et donc $\int_\Omega |u|^2 =: U_2 \leq \frac{U_1}{\lambda_1}$ fixée et par injection de Sobolev, $\int_\Omega |u|^p =: U_3 \geq KU_1$ aussi. Par homogénéité,

$$I(\mu u) = \frac{\mu^2}{2}U_1 + \lambda\frac{\mu^2}{2}U_2 - \frac{\mu^p}{p}U_3$$

et comme $p > 2$, $I(\mu u) \xrightarrow{\mu\to\infty} -\infty$. Toutes les hypothèses du Théorème 2.6 sont donc vérifiées. On choisit un $u_1 = \mu u$ avec μ assez grand, le Théorème nous dit qu'en prenant les chemins de fonctions liant 0 à u_1 dans $W_0^{1,2}(\Omega)$, on atteindra un point critique $\bar{u}$ avec $I(\bar{u}) \geq \alpha$. Ce $\bar{u}$ est une solution non-triviale à Équation (2.7), et puisque $I(u) = I(|u|)$ on peut de nouveau supposer $u \geq 0$. Comparons cette solution à celle obtenue dans la section précédente. On avait précédemment

$$\bar{u}_1 \text{ minimiseur de } E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u|^2 + \lambda|u|^2) \text{ sur } \int_\Omega |u|^p = 1$$

et donc $K\|\bar{u}_1\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq 1$, en supposant $\lambda \geq 0$,

$$I(\bar{u}_1) = E(\bar{u}_1) - \frac{1}{p} \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\|\bar{u}_1\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} - \frac{1}{p} \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)K^{-2} - \frac{1}{p}. \tag{2.12}$$

Ici en revanche on a une solution $\bar{u}_2$, on peut prendre $1 < \rho < \left(\frac{p}{2}\right)^{1/(p-2)}$, et

$$I(\bar{u}_2) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{p}\rho^{\,p-2}\right)\rho^2 > \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)\rho^2 > \frac{1}{4}. \tag{2.13}$$

En fonctions des valeurs des paramètres λ_1, λ, K et p, on peut se retrouver a priori avec $I(\bar{u}_2) > I(\bar{u}_1)$, on aura donc obtenu une solution distincte, à énergie de niveau intermédiaire. □

Chapitre 2

Étude d'une équation critique

2.1 Quelques observations

La condition de Palais-Smale décrite au chapitre précédent permet d'étendre l'intuition qu'on a en dimension finie, que si deux points sont séparés par une zone d'élévation plus grande on doit pouvoir atteindre un col entre les deux. Elle est alors utile pour trouver des solutions dans le cas où une fonctionnelle, associée à un problème d'EDP, a les bonnes propriétés. Comme on l'a vu dans l'application la partie la plus technique est souvent de montrer que cette fonctionnelle I satisfait bien Palais-Smale. Malheureusement (P-S) , bien que plus faible qu'une vraie condition de compacité, n'est assez vite plus respectée dans les problèmes étudiés. Notamment dans des cas devenant critiques, en prenant la limite d'équations dont on connait les solutions.

Lorsqu'on parle d'espaces fonctionnels de dimension infinie en effet il se pourrait que l'espace de définition soit tel qu'un infimum existe, mais ne puisse pas être atteint. Dans certains cas des suites minimisantes ne pourront converger que faiblement. Dans ce chapitre nous observerons un tel exemple où on n'a pas de relative compacité forte pour les suites de Palais-Smale, mais nous pourrons tout de même caractériser ce qui empêche la convergence forte. Nous commencerons par introduire les outils nécessaires pour l'analyse du problème, et nous présenterons à la fois un résultat de non-existence puis d'existence en fonction de la topologie du domaine de définition. Ce chapitre suit Struwe (2008), avec des résultats additionnels venant de Hebey (2014). Il est à noter que par rapport aux sources on prendra parfois des libertés dans les notations pour rester consistants avec le début du travail, notamment on inversera le sens de λ dans les équations critiques, et notre constante de Sobolev $S^2(\Omega)$ correspond à $S(\Omega)$ dans Struwe (2008).

Existence et Non-existence de solutions : On a déjà vu dans le chapitre précédent à deux reprises une preuve de l'existence de solutions classiques au problème sous-critique

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = u\,|u|^{p-2} & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad p < 2^*. \tag{1.1}$$

À partir de maintenant nous allons considérer la forme critique de cette équation, c'est à dire lorsqu'on prend $p = \frac{2n}{n-2} = 2^*$. Les preuves vues auparavant se reposaient de façon essentielle sur le fait que $p < 2^*$, notamment pour obtenir des injections compactes $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$. On peut se demander si ces méthodes ne pourraient pas toutefois être légèrement modifiées pour quand

même utiliser les outils de méthodes de variations et obtenir des solutions en minimisant certaines fonctionnelles. Concrètement, si comme dans la Section 1.1 on essaye de résoudre le problème en cherchant à minimiser sous contrainte la fonctionnelle

$$\begin{aligned} E(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + \lambda\,|u|^2\right) dx \\ \text{sur } M &= \{u \in W_0^{1,2}(\Omega) : \int_\Omega |u|^{2^*}\,dx = 1\}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

malheureusement M n'est plus fermé dans $W_0^{1,2}$, l'injection n'étant plus compacte, et donc la première méthode qu'on a vu tombe rapidement à l'eau. En effet, E est toujours minorée sur M et on peut donc prendre une suite minimisante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans M de E, $\lim_{n\to\infty} E(u_n) = \inf_{u\in M} E(u) =: E$. Cette suite est alors bornée dans $W_0^{1,2}$,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx &\le 2E(u_n) + |\lambda| \left(\int_\Omega |u_n|^{2^*}\,dx\right)^{2/2^*} |\Omega|^{(2^*-2)/2^*} \\ &\le 2E + C\,|\lambda| + o(1) \end{aligned} \tag{1.3}$$

et donc quitte à devoir prendre une sous-suite qu'on renommera (u_n), on peut considérer que $u_n \rightharpoonup u_0$ faiblement vers un $u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$. L'injection $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ reste compacte, et donc on sait que dans $L^2(\Omega)$, il y a une autre sous-suite telle que $u_n \to u_0$ fortement, on ne pourra malheureusement pas aller plus loin puisque l'injection dans L^{2^*} n'étant plus compacte, on ne peut pas déduire que $u_n \to u_0$ fortement dans $L^{2^*}(\Omega)$ et donc on ne sait pas si $u_0 \in M$. On aura malgré tout par semi-continuité inférieure de la norme que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u_0|^2\,dx &\le \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx = \liminf_{n\to\infty} \left(2E(u_n) - \lambda \int_\Omega |u_n|^2\,dx\right) \\ &= 2E - \lambda \int_\Omega |u_0|^2\,dx. \end{aligned} \tag{1.4}$$

De sorte que

$$E(u_0) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u_0|^2 + \lambda\,|u_0|^2\right) dx \le E \tag{1.5}$$

et donc si $u_0 \in M$, u_0 doit réaliser l'infimum et de la même manière qu'on avait procédé dans le cas sous-critique, via les multiplicateurs de Lagrange on trouve que u_0 mène à une solution de l'équation de départ. Il faut bien insister ici sur le fait que ceci ne résout pas le problème critique que l'on a considéré, même dans le meilleur des cas on a un candidat u_0 qui pourrait résoudre notre équation, mais la suite minimisante ne converge que faiblement vers celui-ci. Le Théorème principal de ce chapitre servira justement à quantifier ce qui empêche la suite de converger fortement. Il s'appliquera en fait à des suites plus générales que simplement les suites minimisantes, c'est à dire aux suites de Palais-Smale pour E.

Bien que la première partie de la résolution du problème ne puisse être appliquée ici, la seconde partie qui dérivait la régularité des solutions est encore valable. Dans les cas où une solution existerait, le Lemme 1.18, bien que sa preuve se basait fondamentalement sur le fait que $p < 2^*$, est encore vrai dans le cas critique. La démonstration devient alors plus subtile, puisque la méthode de Bootstrap présentée ne pourra pas fonctionner directement.

Théorème 1.1 (Régularité des solutions critiques). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert borné, $n \geq 3$. Prenons $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in W^{1,2}$ solution faible $u \geq 0$ de l'équation critique

$$-\Delta u + \lambda u = u\,|u|^{2^*-2}\,.$$

Alors $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

Preuve. Dans le cas sous-critique ce qui lançait le Bootstrap et permettait éventuellement de conclure était que $-\Delta u \in L^{\frac{2^*}{p-1}}(\Omega)$. La procédure nous donnait une suite $q_{n+1} = \frac{nq_n}{n-2q_n}\frac{1}{1-p}$ qui tendait vers l'infini en commençant en $q_0 = \frac{2^*}{p-1} > \frac{2^*}{2^*-1}$ puisque $p < 2^*$.

Ici on a $-\Delta u \in L^{\frac{2^*}{2^*-1}}$, si on utilise ceci comme q_0 on a $q_1 = q_0$ et la procédure ne fonctionne pas.

En revanche, on a comme avant $u \in L^{2^*}(\Omega)$ et donc $\int_\Omega u^{2^*} dx < \infty$. Posons $p = 2/(n-2)$ et on définit pour $K > 0$

$$\begin{cases} u_K := u.\min(u^p, K) \\ u_{K,2} := u.\min(u^{2p}, K^2). \end{cases} \tag{1.6}$$

On a $u_K, u_{K,2} \in W^{1,2}(\Omega)$, avec en particulier $\int_\Omega u_K^2 dx \leq \int_\Omega u^2 u^{2p} dx \leq C$ indépendamment de $K > 0$, puisque $2 + 2p = 2^*$. On calcule également

$$\int_\Omega \nabla u \nabla u_{K,2} dx = \int_\Omega |\nabla u|^2 \min(u^{2p}, K^2) dx + 2p \int_{\{u^p \leq K\}} u^{2p} |\nabla u|^2 dx. \tag{1.7}$$

Or puisque u est solution de l'équation critique, en la testant contre $u_{K,2} \in W^{1,2}$,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla u_{K,2} dx + \lambda \int_\Omega u u_{K,2} dx = \int_\Omega u^{2^*-1} u_{K,2} dx \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \int_\Omega |\nabla u_K|^2 dx &= \int_\Omega |\nabla u|^2 \min(u^{2p}, K^2) dx + p \int_{\{u^p \leq K\}} u^{2p} |\nabla u|^2 dx \\ &\leq \int_\Omega |\nabla u|^2 \min(u^{2p}, K^2) dx + 2p \int_{\{u^p \leq K\}} u^{2p} |\nabla u|^2 dx = \int_\Omega \nabla u \nabla u_{K,2} dx \\ &\leq \left(\int_\Omega u^{2^*-1} u_{K,2} dx - \lambda \int_\Omega u u_{K,2} dx \right). \end{aligned} \tag{1.9}$$

On a d'une part

$$\left| \int_\Omega u u_{K,2} dx \right| \leq \left| \int_\Omega u^{2p+2} dx \right| = \left| \int_\Omega u^{2^*} dx \right| = C$$

indépendamment de K, et d'autre part en fixant $R > 0$,

$$\begin{aligned} \int_\Omega u^{2^*-1} u_{K,2} dx &= \int_{\{u \leq R\}} u^{2^*} \min(u^{2p}, K^2) dx + \int_{\{u \geq R\}} u^{2^*} \min(u^{2p}, K^2) dx \\ &\leq \text{Cst.} R^{2^*+2p} + \int_{\{u \geq R\}} u^{2^*} \min(u^{2p}, K^2) dx. \end{aligned}$$

$$\text{Et aussi } \int_{\{u\geq R\}} u^{2^*} \min(u^{2p}, K^2)dx = \int_{\{u\geq R\}} u^{2^*-2}u_K^2 dx$$
$$\leq \left(\int_{\{u\geq R\}} u^{2^*}dx\right)^{\frac{2^*-2}{2^*}} \left(\int_{\{u\geq R\}} u_K^{2^*}dx\right)^{\frac{2}{2^*}}$$

par Hölder. On utilise ensuite la version générale de l'inégalité de Poincaré, puisqu'on sait que

$$u_K^{2^*} \leq C\left(\left|u_K - \overline{(u_K)}_\Omega\right|^{2^*} + \overline{(u_K)}_\Omega^{2^*}\right),$$

de façon à ce que

$$\int_{\{u\geq R\}} u^{2^*} \min(u^{2p}, K^2)dx \leq \varepsilon(R)^{\frac{2^*-2}{2^*}} \left(\int_\Omega |\nabla u_K|^2 \, dx + C(R)\right),$$

avec $C(R) \to 0$ pour $R \to \infty$ et $\varepsilon(R) = \int_{\{u\geq R\}} u^{2^*}dx \to 0$ aussi puisque $u \in L^{2^*}(\Omega)$. Donc enfin on a

$$\int_\Omega |\nabla u_K|^2 \leq C_1 R^{2^*+2p} + C_2\varepsilon(R)^{\frac{2^*-2}{2^*}} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \tilde{C}(R) + |\lambda| \, C_3 \quad \forall \ K, R. \tag{1.10}$$

On peut alors fixer R assez grand pour que $C_2\varepsilon(R)^{\frac{2^*-2}{2^*}} \leq 1/2$,

$$\int_\Omega |\nabla u_K|^2 \leq C(R) \quad \forall \ K \geq 0. \tag{1.11}$$

Enfin par inégalité de Sobolev,

$$\int_\Omega u_K^{2^*}dx \leq C \left\|u_K\right\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C', \tag{1.12}$$

cette minoration étant indépendante de K, on peut le laisser tendre vers $+\infty$ et on a donc $u \in L^{2^*(p+1)}(\Omega)$, de sorte que $-\Delta u \in L^{\frac{2^*(p+1)}{2^*-1}}(\Omega)$ avec clairement $\frac{2^*(p+1)}{2^*-1} > \frac{2^*}{2^*-1}$. La procédure de Bootstrap peut donc bien commencer, et on conclut au final $u \in C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$ (on pourrait en fait répéter l'opération jusqu'à avoir $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$). □

Remarque : Il faut noter que bien qu'il y ait encore de la régularité pour les solutions aux équations critiques on perd un peu de force par rapport au cas sous-critique. Dans ce cas là en effet puisqu'on utilisait une simple procédure de Bootstrap qui consistait à enchaîner des espaces L^p via des injections de Sobolev et la théorie de la régularité, ce qui permettait d'avoir une estimée dite *a priori* sur la norme $C^2(\overline{\Omega})$ de la solution. On obtient au final un $C > 0$ ne dépendant pas du $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ pour lequel

$$\left\|u\right\|_{C^2(\overline{\Omega})} \leq C \left\|u\right\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}.$$

Dans ce cas critique-ci, ce qui aura permis de trouver la régularité est l'inégalité (1.10) dans laquelle il nous fallait choisir un R assez grand pour borner uniformément la norme du gradient de $u^{2^*(p+1)}$ essentiellement. Le choix de ce R dépend par contre fortement de la fonction u considérée, de manière à ce que les estimées ne puissent qu'être

$$\left\|u\right\|_{C^2(\overline{\Omega})} \leq C(u) \left\|u\right\|_{W_0^{1,2}(\Omega)},$$

on a donc perdu de l'information sur les normes. On verra plus loin que en effet dans le cas des bulles standard par exemple, on peut prendre des fonctions de norme C^2 arbitrairement grande en concentrant les solutions mais toujours de norme $W_0^{1,2}$ fixe. Il ne peut donc pas y avoir de telles estimées a priori dans le cas critique.

Nous allons voir que dans tous les cas, quelle que soit la méthode qu'on arriverait à employer, elle ne peut mener à des solutions sur tous les domaines.

Théorème 1.2 (Non-existence). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert régulier pas nécessairement borné, $n \geq 3$. Si Ω est étoilé strict par rapport à l'origine, i.e. tous les rayons allant de 0 à $x \in \Omega$ sont contenus dans Ω, et si $\lambda > 0$, alors toute solution $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ au problème de Dirichlet critique

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = u\,|u|^{2^*-2} & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

est en fait identiquement nulle.

Preuve. Par le Théorème de régularité, si u est solution alors $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. En posant

$$G(u) = \frac{-\lambda}{2}\,|u|^2 + \frac{1}{2^*}\,|u|^{2^*}, \tag{1.13}$$

de sorte que $G'(u) = g(u) = -\lambda u + u\,|u|^{2^*-2}$ on a $-\Delta u = g(u)$ avec $u = 0$ sur $\partial\Omega$, équation satisfaite au sens fort.

$$\text{Donc } (\Delta u + g(u))(x \cdot \nabla u) = 0 = \operatorname{div}(\nabla u(x \cdot \nabla u)) - |\nabla u|^2 - x \cdot \nabla\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}\right) + x \cdot \nabla G(u)$$

qu'on obtient par simple calcul, donc

$$0 = \operatorname{div}\left(\nabla u(x \cdot \nabla u) - x\frac{|\nabla u|^2}{2} + xG(u)\right) + \frac{n-2}{2}\,|\nabla u|^2 - nG(u). \tag{1.14}$$

En intégrant cette relation sur Ω, on a d'une part

$$\int_\Omega \operatorname{div}\left(\nabla u(x \cdot \nabla u) - x\frac{|\nabla u|^2}{2} + xG(u)\right) dx = \int_{\partial\Omega}\left(\nabla u(x \cdot \nabla u) - x\frac{|\nabla u|^2}{2} + xG(u)\right) \cdot \nu d\sigma(x), \tag{1.15}$$

avec ν la normale sortante et $d\sigma$ la mesure induite sur le bord de Ω. On a directement

$$\begin{cases} \nu \cdot \nabla u = \frac{\partial u}{\partial \nu} \\ x \cdot \nabla u = x \cdot \nu \frac{\partial u}{\partial \nu} \end{cases}$$

de sorte que $(\nu \cdot \nabla u)(x \cdot \nabla u) = x \cdot \nu \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2$. On a également $u = 0$ sur $\partial\Omega$ ce qui donne que $\nabla u(x) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x)$ et $G(u) = 0$ sur $\partial\Omega$. Donc au final on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 x \cdot \nu d\sigma(x) + \frac{n-2}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - n\int_\Omega\left(-\frac{\lambda}{2}\,|u|^2 + \frac{1}{2^*}\,|u|^{2^*}\right)dx = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\int_\Omega\left(|\nabla u|^2 - |u|^{2^*}\right)dx + \frac{n}{n-2}\lambda\int_\Omega |u|^2\,dx + \frac{1}{n-2}\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 x \cdot \nu d\sigma = 0. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Mais u est solution, et donc en testant l'équation contre u on avait $\int_\Omega (|\nabla u|^2 + \lambda |u|^2 - |u|^{2^*})dx = 0$ et donc

$$2\lambda \int_\Omega |u|^2 \, dx + \int_{\partial\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 x \cdot \nu d\sigma = 0. \tag{1.17}$$

Or $\lambda > 0$, et Ω est étoilé strict donc $x \cdot \nu > 0 \ \forall \ x \in \partial\Omega$, on doit donc avoir pour que cette égalité soit possible $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 0$. Ceci signifie que $u = 0$ presque partout, et comme u est régulier on a effectivement $u \equiv 0$ sur Ω. □

Ce résultat donne une première idée du rôle que joue la topologie du domaine Ω dans l'existence ou non de solutions à l'équation critique. Dans ce cas ci on se demande naturellement ce qu'ont les ouverts étoilés de si particulier pour empêcher une solution non-triviale d'exister. En réalité ces ouverts font partie d'une classe plus grande de domaines qui par homotétie peuvent être envoyés sur l'espace $\mathbb{R}^n$ tout entier. Pour l'instant cette affirmation n'est pas éclairante, la seule chose pouvant lier le Théorème de non-existence et celle-ci est qu'on remarque que dans le résultat, ce qui permet d'obtenir l'égalité (1.17) est de tester l'équation critique contre $x \cdot \nabla u$. Or cette fonction est le générateur infinitésimal de l'action de mise à l'échelle qui agit sur l'espace des fonctions. Si on fait une homotétie de Ω, on passe de $u(x)$ à $u(Rx)$ et on a justement $\frac{du(Rx)}{dR} = x \cdot \nabla u(Rx)$. Toutefois, la raison pour laquelle cela pose problème n'est pas explicite dans le Théorème ci-dessus. Tout au long de ce chapitre on essaiera de donner de l'intuition sur la raison pour laquelle cette action de mise à l'échelle joue un rôle fondamental pour l'étude des solutions à l'équation critique.

On sait que la première méthode variationnelle qu'on connait ne fonctionne plus dans le cas critique, et en fait il en est de même de la seconde basée sur le Théorème du col. Le fait que cette action puisse agir sur les solutions implique un manque de compacité qui ne permettra pas aux suite de Palais-Smale de converger fortement. En effet dans le cas critique la fonctionnelle

$$I_\lambda : u \mapsto \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + \lambda |u|^2\right) dx - \frac{1}{2^*} \int_\Omega |u|^{2^*} \, dx \tag{1.18}$$

ne satisfait plus Palais-Smale $\forall u \in W_0^{1,2}(\Omega) \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ comme nous le verrons un peu plus loin lorsque nous auront introduit les bulles standard.

En revenant à la méthode de minimisation sous contraintes (1.2), elle est équivalente à la minimisation du quotient

$$S_\lambda^2(u;\Omega) := \frac{\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + \lambda |u|^2\right) dx}{\left(\int_\Omega |u|^{2^*} \, dx\right)^{2/2^*}}. \tag{1.19}$$

Une solution $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ au problème critique atteindrait l'infimum de $S_\lambda^2(u;\Omega)$. On remarque que ce quotient est intimement lié à la meilleure constante pour l'injection de Sobolev de $W_0^{1,2}(\Omega)$ dans $L^{2^*}(\Omega)$, puisque celle-ci est caractérisée par

$$S(\Omega) \left(\int_\Omega |u|^{2^*} \, dx\right)^{1/2^*} \leq \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{1/2}. \tag{1.20}$$

Donc si la constante optimale est atteinte par $u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega) = D^{1,2}(\Omega)$, avec $S(\Omega)\|u_0\|_{L^{2^*}} = \|u_0\|_{D^{1,2}}$, u_0 réalise en fait l'infimum de $S_0^2(u;\Omega)$ et donc u_0 satisfait

$$-\Delta u_0 = K u_0 |u_0|^{2^*-2} \tag{1.21}$$

dans Ω faiblement pour une certaine constante $K > 0$.

Avant de terminer par un résultat d'existence de solutions, nous allons discuter davantage des raisons qui justifient notre intérêt pour les remises à l'échelle. Rappelons la définition de l'espace $D^{1,p}(\Omega)$, complétion de $C_0^\infty(\Omega)$ pour la norme $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$. On commence par remarquer que les normes sur $D^{1,p}$ et L^q sont justement invariantes par translation et certains changement d'échelle.

– Si on passe de $u \in D^{1,p}(\Omega) \rightsquigarrow u_R(x) := R^{-(n-p)/p} u(x/R) \in D^{1,p}(R\Omega)$ on a

$$\begin{aligned} \|u_R\|_{D^{1,p}(R\Omega)} &= \left(\int_{R\Omega} \left| R^{-(n-p)/p} \nabla(u(x/R)) \right|^p dx \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_{R\Omega} R^{-(n-p)} R^{-p} \left| (\nabla u)(x/R) \right|^p dx \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_{\Omega} R^{-n} \left| \nabla u(y) \right|^p R^n dy \right)^{1/p} = \|u\|_{D^{1,p}(\Omega)} . \end{aligned} \tag{1.22}$$

– Et si on passe de $u \in L^q(\Omega) \rightsquigarrow \tilde{u}_R(x) := R^{-n/q} u(x/R) \in L^q(R\Omega)$ on a

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_R\|_{L^q(R\Omega)} &= \left(\int_{R\Omega} \left| R^{-n/q} u(x/R) \right|^q dx \right)^{1/q} \\ &= \left(\int_{\Omega} R^{-n} \left| u(y) \right|^q R^n dy \right)^{1/q} = \|u\|_{L^q(\Omega)} . \end{aligned} \tag{1.23}$$

Dans le cas $\frac{n-p}{p} = \frac{n}{q}$, i.e. $q = \frac{np}{n-p} = p^*$, ces deux normes sont simultanément invariantes sous les mêmes changements d'échelles. La constante de Sobolev, constante maximale de l'inclusion telle que $S \|u\|_{L^{p^*}} \leq \|u\|_{D^{1,p}(\Omega)}$ est alors indépendante du domaine Ω.

Proposition 1.3. Soient $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ et $p^* = \frac{np}{n-p}$. Alors la constante $S(\Omega)$ maximale pour laquelle

$$S(\Omega) \|u\|_{L^{p^*}} \leq \|u\|_{D^{1,p}(\Omega)}$$

est indépendante du domaine Ω.

Preuve. En effet, quel que soit Ω, on peut étendre $u \in C_0^\infty(\Omega)$ par 0 partout hors de Ω, et donc $C_0^\infty(\Omega) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. De la même façon on peut voir $D^{1,p}(\Omega)$ comme sous-ensemble de $D^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ et donc

$$S(\Omega) = \inf\{ \|u\|_{D^{1,p}(\Omega)} : \ u \in D^{1,p}(\Omega) \text{ avec } \|u\|_{L^{p^*}} = 1 \} \geq S(\mathbb{R}^n). \tag{1.24}$$

Dans l'autre sens, soit $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ suite minimisante de $D^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ pour $S(\mathbb{R}^n)$, avec $\|u_m\|_{L^{p^*}} = 1$. Tout d'abord par densité de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $D^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ on peut prendre $u_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Quitte à translater l'ouvert (donc sans modifier les normes ni la valeur de S), on suppose $0 \in \Omega$ et alors par invariance d'échelle, pour un R_m assez petit, on trouve $v_m = (u_m)_{R_m} \in C_0^\infty(\Omega)$, puisque si $u_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ il y a un support borné qu'on peut rétrécir par homotétie pour le faire rentrer dans Ω. Mais alors

$$\|v_m\|_{D^{1,p}(\Omega)} = \|u_m\|_{D^{1,p}(\Omega)} \qquad \Rightarrow S(\Omega) \leq \liminf_{n\to\infty} \|v_m\|_{D^{1,p}(\Omega)} = S(\mathbb{R}^n) \tag{1.25}$$

$$\|v_m\|_{L^{p^*}} = \|u_m\|_{L^{p^*}} \tag{1.26}$$

et donc $\forall\ \Omega,\ S(\Omega) = S(\mathbb{R}^n) =: S$. □

Bien que cet infimum soit toujours le même, il ne peut être atteint que si $\Omega = \mathbb{R}^n$, pour $p > 1$. On notera également $S^2_\lambda(\Omega) := \inf\{S_\lambda(u;\Omega) :\ u \neq 0 \in W^{1,2}_0(\Omega)\}$ qui existe puisque S^2_λ est forcément non-négative.

Théorème 1.4 (Existence). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domaine borné régulier, $n \geq 3$. Si $S^2_\lambda(\Omega) < S^2$, alors $\exists u \neq 0 \in W^{1,2}_0(\Omega)$ avec $u \geq 0$ réalisant l'infimum de $S^2_\lambda(u;\Omega)$, i.e. on a une solution de l'équation critique.

Preuve. Prenons une suite minimisante de S^2_λ dans $W^{1,2}_0(\Omega)$, par homogénéité on peut supposer que $\|u_m\|_{L^{2^*}} = 1$ et comme $S^2_\lambda(u;\Omega) = S^2_\lambda(|u|\,;\Omega)$ on peut aussi supposer que $u_m \geq 0$. On a alors

$$S^2_\lambda(u_m;\Omega) = \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + \lambda\,|u|^2\right) dx \tag{1.27}$$

avec $S^2_\lambda(u_m;\Omega) \to S^2_\lambda(\Omega) < \infty$. En refaisant les mêmes calculs qu'en (1.3) on obtient que cette suite est bornée dans $W^{1,2}_0(\Omega)$ et on peut donc à sous-suite près considérer que $u_m \rightharpoonup u_0 \in W^{1,2}_0(\Omega)$ avec par compacité de l'injection $W^{1,2}_0(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ avec une nouvelle sous-suite $u_n \to u_0$ fortement dans $L^2(\Omega)$. Comme avant on ne peut en revanche pas dire $u_n \to u_0$ dans $L^{2^*}(\Omega)$. Mais d'une part on a

$$\int_\Omega |\nabla u_m|^2\,dx = \int_\Omega |\nabla(u_m - u_0)|^2\,dx + \int_\Omega |\nabla u_0|^2\,dx + 2\int_\Omega \nabla(u_m - u_0).\nabla u_0 dx \tag{1.28}$$

avec ce dernier terme $\int_\Omega \nabla(u_m - u_0).\nabla u_0 dx \to^{m\to\infty} 0$ puisque $u_m \rightharpoonup u_0$ dans $W^{1,2}_0(\Omega)$. On a aussi $\int_\Omega |u_m|^2\,dx \to \int_\Omega |u_0|^2\,dx$ de sorte que

$$\begin{aligned} S^2_\lambda(u_m;\Omega) &= \int_\Omega |\nabla(u_m - u_0)|^2\,dx + \int_\Omega |\nabla u_0|^2\,dx + o(1) + \lambda\int_\Omega |u_0|^2\,dx + o(1) \\ &= \|u_m - u_0\|^2_{D^{1,2}(\Omega)} + \int_\Omega \left(|\nabla u_0|^2 + \lambda\,|u_0|^2\right) dx + o(1) \\ &\geq S^2\,\|u_m - u_0\|^2_{L^{2^*}(\Omega)} + S^2_\lambda(\Omega)\,\|u_0\|^2_{L^{2^*}} \geq S^2\,\|u_m - u_0\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)} + S^2_\lambda(\Omega)\,\|u_0\|^{2^*}_{L^{2^*}}. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Mais on a également

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(|u_m|^{2^*} - |u_m - u_0|^{2^*}\right) dx &= \int_\Omega \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(|u_m + (t-1)u_0|^{2^*}\right) dt dx \\ &= 2^* \int_0^1 \int_\Omega (u_m + (t-1)u_0)\,|u_m + (t-1)u_0|^{2^*-2}\,u_0 dx dt \\ &\xrightarrow{m\to\infty} 2^* \int_0^1 \int_\Omega t u_0\,|t u_0|^{2^*-2}\,u_0 dx dt = \frac{2^*}{2^*}\int_\Omega |u_0|^{2^*}\,dx, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} &\|u_0\|^{2^*}_{L^{2^*}} = \|u_m\|^{2^*}_{L^{2^*}} - \|u_m - u_0\|^{2^*}_{L^{2^*}} + o(1) = 1 - \|u_m - u_0\|^{2^*}_{L^{2^*}} + o(1) \\ &\text{et } S^2_\lambda(u_m;\Omega) \geq (S^2 - S^2_\lambda(\Omega))\,\|u_m - u_0\|^{2^*}_{L^{2^*}} + S^2_\lambda(\Omega) + o(1). \end{aligned} \tag{1.30}$$

Comme $S^2 > S^2_\lambda(\Omega) = \lim_{m\to\infty} S^2_\lambda(u_m;\Omega)$, on doit avoir $\|u_m - u_0\|^{2^*}_{L^{2^*}} = o(1)$, i.e. $u_m \to u_0$ dans $L^{2^*}(\Omega)$. Dans ce cas on peut passer à la limite et on aura $\|u_0\|_{L^{2^*}} = 1$ et $u_0 \geq 0$, avec par semi-continuité

$$S^2_\lambda(u_0;\Omega) \leq \lim_{n\to\infty} S^2_\lambda(u_m;\Omega) = S^2_\lambda(\Omega), \tag{1.31}$$

donc $u_0 \in W^{1,2}_0(\Omega)$ réalise l'infimum de $S^2_\lambda = 2E$ dans $\{u \in W^{1,2}_0(\Omega) \text{ tq } \int_\Omega |u|^{2^*} = 1\}$. Comme on l'avait dit en début de section, en utilisant les multiplicateurs de Lagrange on voit que u_0 donnera lieu à une solution du problème. En effet il y a $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $DS^2_\lambda(u_0;\Omega) = \mu 2^* u_0 \left|u_0\right|^{2^*-2}$ au sens faible, ce qui mène à $\mu = \frac{2}{2^*} S^2_\lambda(u_0;\Omega) = \frac{2}{2^*} S^2_\lambda(\Omega)$. De là on peut prendre un α tel que

$$\left(\frac{2}{2^*} S^2_\lambda(\Omega)\right)^{\alpha - 2^* + 2} = \frac{2}{2^*},$$

en définissant $\tilde{u}_0 = \left(\frac{2}{2^*} S^2_\lambda(\Omega)\right)^\alpha u_0$, $\tilde{u}_0 \in W^{1,2}_0(\Omega)$ satisfera

$$-\Delta \tilde{u}_0 + \lambda \tilde{u}_0 = \tilde{u}_0 \left|\tilde{u}_0\right|^{2^*-2} \quad \text{sur } \Omega, \tag{1.32}$$

et de par sa forme, on a $S^2_\lambda(\tilde{u}_0;\Omega) = S^2_\lambda(u_0;\Omega) = S^2_\lambda(\Omega)$ donc $\tilde{u}_0$ réalise encore l'infimum de S^2_λ, mais avec une norme $L^{2^*}(\Omega)$ différente de 1. □

Remarque : Cette quantité S^2_λ ne dépendant que du domaine Ω, cela nous donne un nouvel argument donnant de l'importance à la nature de l'ouvert considéré. Par ce résultat, on peut donc directement déduire que dans le cas d'un ouvert étoilé, $S^2_\lambda(\Omega) \geq S^2$.

Les bulles standard : Notons $B(1)$ la boule unité de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, on sait alors que $W^{1,2}(B(1)) \hookrightarrow L^{2^*}(B(1))$. On étudie comme toujours l'équation critique

$$-\Delta u + \lambda u = u \left|u\right|^{2^*-2}. \tag{1.33}$$

Supposons qu'il y ait une solution $u \in W^{1,2}(B(1))$, on va alors changer l'échelle de cette fonction, et poser comme plus tôt $u_R(x) := R^{-\frac{n-2}{2}} u(x/R) \in W^{1,2}(B(R))$. On a alors en reproduisant les étapes de (1.22), (1.23)

$$\begin{aligned}
\|u_R\|^2_{W^{1,2}(B(R))} &= \int_{B(R)} |u_R|^2 \, dx + \int_{B(R)} |\nabla u_R|^2 \, dx \\
&= \int_{B(R)} R^{2-n} \left|u(Rx)\right|^2 dx + \int_{B(R)} R^{2-n} R^2 \left|\nabla u(Rx)\right|^2 dx \\
&= \int_{B(1)} R^{2-n} R^n \left|u(y)\right|^2 dy + \int_{B(1)} R^{-n} R^n \left|\nabla u(y)\right|^2 dy \\
&= \|u\|^2_{W^{1,2}(B(1))} + (R^2 - 1) \|u\|^2_{L^2(B(1))}.
\end{aligned} \tag{1.34}$$

Donc, bien que u_R garde toujours la même norme L^{2^*} et $D^{1,2}$,

- pour $R \to 0$, u_R devient de support de plus en plus petit et sa norme L^2 tend vers 0, mais ponctuellement $u_R(0) \to \infty$;
- pour $R \to \infty$, le support de u_R explose et devient $\mathbb{R}^n$, $\|u_R\|_{W^{1,2}} \to \infty$.

On avait démarré avec u solution de (1.33) sur $B(1)$, comment se comporte-t-elle face à la remise à l'échelle ? On observe tout d'abord assez simplement par calcul que comme lorsque $u \in C^2(\Omega)$, $-\Delta(u(\mu x)) = -\mu^2(\Delta u)(\mu x)$, et donc

$$\begin{aligned} -\Delta u_R(x) - u_R(x)\left|u_R(x)\right|^{2^*-2} &= -R^{-\frac{n-2}{2}} R^{-2}(\Delta u)(x/R) - \left(R^{-\frac{n-2}{2}}\right)^{\frac{2n}{n-2}-1} u\left|u\right|^{2^*-2}(x/R) \\ &= R^{-\frac{n+2}{2}}\left(-\Delta u(x/R) - u\left|u\right|^{2^*-2}(x/R)\right). \end{aligned}$$

En utilisant que u est une solution sur $B(1)$, on a ici sur $x/R \in B(1)$

$$= -R^{-\frac{n+2}{2}} \lambda u(x/R) \xrightarrow{R\to\infty} 0 \text{ pour } x \in B(R) \to \mathbb{R}^n.$$

Puisque $u(x/R) \to u(0)$ fini par le Théorème de régularité 1.1. Ceci montre qu'à partir d'une solution u sur $B(1)$, on peut en tirer une suite u_R bornée de $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, qui converge dans $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ vers u_∞ satisfaisant

$$-\Delta u_\infty = u_\infty\left|u_\infty\right|^{2^*-2} \quad \text{sur } \mathbb{R}^n. \tag{1.35}$$

Toutefois cette solution limite ne sera pas dans $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, sa norme étant divergente.

Sur $\mathbb{R}^n$, on connait déjà la forme explicite de solutions à cette équation, on peut en effet directement vérifier que

$$b(x) = \left(\frac{1}{1+\frac{|x|^2}{n(n-2)}}\right)^{\frac{n-2}{2}} \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{1.36}$$

satisfait (1.35), et $b \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Par invariance d'échelle dans les termes de cette équation, on sait que si u est solution u_R l'est aussi, et de même norme que u dans $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. On voit aussi que les équations et les normes sont invariantes par translation, de telle manière qu'on peut centrer ces solutions n'importe où sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.5. Soit $R > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$, on définit la *bulle standard* centrée en x_0 et de poids R,

$$b_{R,x_0}(x) := (b)_R(x - x_0) = \left(\frac{R}{R^2+\frac{|x-x_0|^2}{n(n-2)}}\right)^{\frac{n-2}{2}}.$$

Chaque bulle $b_{R,x_0} \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^n)$ est solution de l'équation critique limite, sur $\mathbb{R}^n$ avec $\lambda = 0$. On a de plus $\|b_{R,x_0}\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^n)} = \|b\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^n)}$.

Enfin, de même que si u réalise l'infimum de S_λ^2 alors u satisfait l'équation critique, réciproquement les bulles standard qui sont solution de l'équation pour $\lambda = 0$ atteignent l'infimum de $S_0^2(u;\Omega)$, c'est à dire qu'elles atteignent la constante optimale pour l'injection de Sobolev,

$$S\left\|b_{R,x_0}\right\|_{L^{2^*}(\Omega)} = \left\|b_{R,x_0}\right\|_{D^{1,2}(\Omega)}. \tag{1.37}$$

Ces fonctions satisfont $-\Delta b_{R,x_0} = b_{R,x_0}\left|b_{R,x_0}\right|^{2^*-2}$ au sens faible, et en testant cette équation contre b_{R,x_0}, on obtient de plus

$$\begin{aligned} &\left\|b_{R,x_0}\right\|^2_{D^{1,2}(\Omega)} = \left\|b_{R,x_0}\right\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)} = S^{-2^*}\left\|b_{R,x_0}\right\|^{2^*}_{D^{1,2}(\Omega)} \\ \Leftrightarrow\ &\left\|b_{R,x_0}\right\|_{D^{1,2}(\Omega)} = S^{\frac{2^*}{2^*-2}} = S^{n/2}, \end{aligned} \tag{1.38}$$

on a une forme explicite de la meilleure constante de Sobolev pour l'injection, en calculant explicitement l'intégrale $\|b\|_{D^{1,2}(\Omega)}$. Toutes ces bulles sont alors de même énergie

$$I_0(b_{R,x_0}) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla b_{R,x_0}|^2\,dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |b_{R,x_0}|^{2^*}\,dx = I_0(b) = \frac{S^n}{n} =: \beta^* \tag{1.39}$$

Lemme 1.6. Soit $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ solution de l'équation critique limite

$$-\Delta u = u\,|u|^{2^*-2} \quad \text{sur } \mathbb{R}^n. \tag{1.40}$$

Si u a une symétrie radiale par rapport à un certain point $x_0 \in \mathbb{R}^n$, alors il existe un poids $R > 0$ tel que $u = b_{R,x_0}$.

Preuve. Sans perte de généralité on suppose $x_0 = 0$. En d'autres termes on doit montrer que parmi les fonctions à symétrie radiale, les bulles standard sont les uniques minimiseurs pour la constante de l'injection de Sobolev.

Si u satisfait l'équation critique, par régularité $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. On peut donc prendre $R > 0$ tel que $b_R(0) = R^{-\frac{n-2}{2}} = u(0)$. Mais alors comme u, b_R doivent être $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et à symétrie radiale, on doit aussi avoir $\frac{du}{dr}(0) = \frac{db_R}{dr}(0) = 0$ et donc u et b_R sont deux solutions de l'équation ordinaire du second ordre en $r = |x|$

$$r^{1-n}\frac{d}{dr}\left(r^{n-1}\frac{d}{dr}\right)u = u\,|u|^{2^*-2}$$

de mêmes conditions initiales. Par unicité des solutions à ce genre d'équations simples on obtient donc que $u = b_R$ sur $\mathbb{R}^n$, et donc $I_0(u) = \beta^*$. □

Si les bulles standard sont les uniques solutions à l'équation critique limite dans $\mathbb{R}^n$ parmis les fonctions à symétrie radiale autour d'un point, en général il peut aussi y avoir des solutions changeant de signe dans $\mathbb{R}^n$. Soit $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ une telle solution de (1.40) changeant de signe, on peut la décomposer en sa partie positive et négative, $v = v_+ - v_-$ où $v_+ = \max(0, v)$ et $v_- = -\min(0, v)$. La fonction v étant solution de l'équation limite, en la testant contre v_+ on a

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla v \nabla v_+ - v\,|v|^{2^*-2}\,v_+)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla v_+|^2 - |v_+|^{2^*})dx \geq \left(1 - S^{-2^*}\,\|v_+\|^{2^*-2}_{D^{1,2}(\mathbb{R}^n)}\right)\|v_+\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^n)} \\ \Leftrightarrow &\|v_+\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^n)} \geq S^{n/2} \end{aligned} \tag{1.41}$$

et de même pour v_-. Alors pour chacun

$$I_0(v_\pm) \geq \frac{S^n}{n} = \beta^*, \tag{1.42}$$

avec en fait une inégalité stricte puisque sinon v_+ (et idem pour v_-) atteindrait la constante optimale sur l'ouvert $\{u > 0\} \subsetneq \mathbb{R}^n$ ce qui contredirait le fait que la constante ne peut être atteinte que sur $\mathbb{R}^n$. On a donc finalement

$$I_0(v) = I_0(v_+) + I_0(v_-) > 2\beta^*. \tag{1.43}$$

On a en fait un résultat plus fort que le Lemme 1.6, provenant de Caffarelli, Gidas, et Spruck (1989, p.294).

Théorème 1.7. Si $u \in D^{1,2}$ est solution du problème critique limite (1.40), et que $u \geq 0$, alors u sera à symétrie radiale autour d'un certain point $x_0 \in \mathbb{R}^n$, et donc u s'écrit comme une bulle standard.

2.2 Résultat principal

Théorème de décomposition des solutions : On revient au problème de base

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = u\,|u|^{2^*-2} & \text{sur } \Omega \\ u \in W_0^{1,2}(\Omega). \end{cases} \tag{2.1}$$

La fonctionnelle dont on essaye de trouver les points critiques est

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + \lambda\,|u|^2\right) dx) - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*}. \tag{2.2}$$

Comme on l'a déjà dit elle ne satisfait plus Palais-Smale dans tous les cas. En revanche, et c'est sur ça que va se baser la suite, on a quand même une propriété importante.

Proposition 2.1. Toute suite de Palais-Smale pour la fonctionnelle (2.2) est bornée.

Preuve. La preuve procède de façon similaire à ce qu'on avait fait dans le cas non-critique pour prouver que les suites de Palais-Smale étaient bornées dans le cadre de l'application du Théorème du Col. Prenons $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ suite de Palais-Smale dans $W_0^{1,2}(\Omega)$, c'est à dire avec $I_\lambda(u_m) \leq c\ \forall m$ et $DI_\lambda(u_m) \to 0$. De par la forme de la fonctionnelle, on observe que

$$2I_\lambda(u_m) - \langle DI_\lambda(u_m), u_m\rangle = (1 - \frac{2}{2^*})\int_\Omega |u_m|^{2^*}\,dx \geq C\left(\int_\Omega |u_m|^2\,dx\right)^{2^*/2} \tag{2.3}$$

par Hölder. On a donc, en acceptant que C représente une constante indépendante pouvant changer de valeur entre deux égalités, que

$$\|u_m\|^2_{D^{1,2}(\Omega)} = 2I_\lambda(u_m) - \lambda\int_\Omega |u_m|^2\,dx + \frac{2}{2^*}\int_\Omega |u_m|^{2^*}\,dx$$

$$\text{avec } \begin{cases} I_\lambda(u_m) \leq c \\ \int_\Omega |u_m|^{2^*}\,dx = C + o(1)\,\|u_m\|_{D^{1,2}(\Omega)} \\ \int_\Omega |u_m|^2\,dx \leq (C + o(1)\,\|u_m\|_{D^{1,2}(\Omega)})^{2/2^*} \leq C + o(\|u_m\|_{D^{1,2}(\Omega)}). \end{cases}$$

Et enfin

$$\|u_m\|^2_{D^{1,2}(\Omega)} \leq C + o(\|u_m\|_{D^{1,2}(\Omega)}) \tag{2.4}$$

qui nous permet de conclure que u_m est bornée. □

Par réflexivité de l'espace $W_0^{1,2}(\Omega)$, on peut donc supposer quitte à devoir prendre une sous-suite que $u_m \rightharpoonup u_0$ faiblement dans $W_0^{1,2}(\Omega)$, et avec $DI_\lambda(u_m) \to 0$. À la limite, u_0 sera donc solution de l'équation critique (2.1). Comme on l'a déjà dit, cette convergence ne pourra dans certains cas

que rester faible, et le Théorème principal de ce travail consiste justement à expliquer de quelles manières les suites de Palais-Smale peuvent exploser, ce qui les empêche de converger fortement.

Les bulles standard sont un exemple canonique qui montre que le manque de compacité des injections $D^{1,2} \hookrightarrow L^{2^*}$ peut mener à des suites de Palais-Smale qui ne convergent pas fortement. Prenons Ω borné, et $x_0 \in \Omega$, on peut alors prendre la bulle centrée en x_0 et de poids R, et en faisant tendre $R \to 0$ on peut essentiellement faire en sorte que Ω contienne toute la bulle (que la partie de celle-ci hors de Ω soit négligeable en norme). De cette façon on a une suite de bulles d'énergie I_λ toujours égale, avec $DI_\lambda(b_{R,x_0}) \to^{R\to 0} 0$ mais malgré tout $b_{R,x_0} \rightharpoonup 0$ seulement, et en fait la bulle explose en norme L^∞.

Théorème 2.2. Soit Ω ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On prend $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ suite de Palais-Smale pour I_λ dans $W_0^{1,2}(\Omega) \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, qui converge faiblement vers $u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$ solution du problème (2.1). Alors il y a un nombre fini de centres x_m^j et de poids $R_m^j \to^{m\to\infty} 0$, $1 \leq j \leq K \in \mathbb{N}$ à m fixé, et des solutions non-triviales au problème critique limite (1.40) $u^j \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ telles que la suite de départ satisfait

$$\left\| u_m - u_0 - \sum_{j=1}^{K} u^j_{R_m^j, x_m^j} \right\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^n)} \to 0.$$

Où comme avant $u^j_{R_m^j,x_m^j}(x) := (R_m^j)^{-\frac{n-2}{2}} u^j(\frac{x-x_m^j}{R_m^j})$. De plus, l'énergie de la suite se décomposera à la limite

$$I_\lambda(u_m) \to I_\lambda(u_0) + \sum_{j=1}^{K} I_0(u^j).$$

Avant de passer à la preuve de ce Théorème, nous discuterons un peu de sa signification. En premier lieu, ce Théorème est fort car il s'applique à des suites qui ne sont solution du problème critique que faiblement à la limite. Il nous donne une décomposition de ces fonctions avec un nombre fini de "bulles" qui font que la fonction limite explose, puisque les $R_m^j \to 0$. Celles-ci auront quelques fois la forme standard $b_{R,x}$ définie plus tôt, mais le Théorème fonctionne également pour des suites de Palais-Smale qui changent de signe, et on pourrait donc avoir des bulles d'une forme plus complexe, changeant de signe aussi. La présence de celles-ci est donc l'unique chose qui empêche la suite de Palais-Smale de converger fortement. Par exemple dans le cas où la topologie du domaine Ω fait qu'il ne peut y avoir que la solution triviale $u_0 \equiv 0$, on saura que toute suite de (P-S) $u_m \rightharpoonup 0$ mais il pourra y avoir des bulles qui viennent exploser ponctuellement et qui font que $u_m \not\to 0$.

Le Théorème permet en outre de lier les niveaux d'énergie de la suite de (P-S) et sa convergence forte. On aura en particulier que si l'énergie de la suite reste sous le seuil β^* qui est l'infimum des énergies possibles pour des solutions à l'équation critique limite, il ne peut simplement pas y avoir d'explosion de la suite et u_m convergera fortement, à sous-suite près, vers u_0.

Lemme 2.3. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert borné, $n \geq 3$. Si $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de Palais-Smale dans $W_0^{1,2}(\Omega)$ à niveau β pour I_λ, c'est à dire que

$$I_\lambda(u_m) \leq \beta \quad \forall\, m \qquad\qquad DI_\lambda(u_m) \to 0,$$

avec $\beta < \beta^* = \frac{S^n}{n}$, alors (u_m) est relativement compacte, on a une sous-suite qui converge fortement dans $W_0^{1,2}(\Omega)$ et donc I_λ satisfait (P-S) .

Preuve. On sait déjà que les suites de (P-S) sont bornées, et donc on peut effectivement à une sous-suite près considérer que $u_m \rightharpoonup u_0$ faiblement dans $W_0^{1,2}(\Omega)$, autrement dit

$$\forall\ \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \int_\Omega \nabla u_m \nabla \varphi dx \to \int_\Omega \nabla u_0 \nabla \varphi dx.$$

Par compacité des injections de Sobolev, on a également que la convergence sera forte dans $L^q(\Omega)$ si $q < 2^*$, en particulier on aura

$$\forall\ \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \begin{cases} \int_\Omega u_m \varphi dx \to \int_\Omega u_0 \varphi dx, \text{ et} \\ \int_\Omega u_m \left|u_m\right|^{2^*-2} \varphi dx \to \int_\Omega u_0 \left|u_0\right|^{2^*-2} \varphi dx. \end{cases}$$

Ceci nous donne que $\forall\ \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\langle DI_\lambda(u_m), \varphi\rangle \to \langle DI_\lambda(u_0), \varphi\rangle$, et par densité on peut l'étendre à $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. En d'autres termes, u_0 est effectivement solution faible du problème (2.1) par unicité des limites, puisque comme $(u_m)_m$ est de (P-S) , $\langle DI_\lambda(u_m), \varphi\rangle \to 0$. En testant ceci contre $u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} 0 = \langle DI_\lambda(u_0), u_0\rangle &= \int_\Omega \left(|\nabla u_0|^2 + \lambda |u_0|^2 - |u_0|^{2^*}\right) dx \\ \text{donc } I_\lambda(u_0) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right) \int_\Omega |u_0|^{2^*} dx = \frac{1}{n} \int_\Omega |u_0|^{2^*} dx \geq 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

On rappelle également que dans le cadre du Théorème 1.4, on avait obtenu pour une suite minimisante

$$\begin{cases} \|u_m\|^2_{D^{1,2}(\Omega)} = \|u_m - u_0\|^2_{D^{1,2}(\Omega)} + \|u_0\|^2_{D^{1,2}(\Omega)} + o(1) \\ \|u_m\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)} = \|u_m - u_0\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)} + \|u_0\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)} + o(1), \end{cases} \tag{2.6}$$

ces résultats s'étendent de la même manière pour des suites de Palais-Smale, et comme $\|u_m\|_{L^2} \to \|u_0\|_{L^2}$,

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_m) &= \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|\nabla u_m|^2 + \lambda |u_m|^2\right) dx - \frac{1}{2^*} \int_\Omega |u_m|^{2^*} dx \\ &= I_\lambda(u_0) + I_0(u_m - u_0) + o(1). \end{aligned}$$

Mais d'une part en utilisant la borne sur $I_\lambda(u_m)$,

$$\begin{aligned} I_0(u_m - u_0) = I_\lambda(u_m) - I_\lambda(u_0) + o(1) &= I_\lambda(u_m) - \frac{1}{n} \int_\Omega |u_0|^{2^*} dx + o(1) \\ &\leq \beta + \varepsilon < \beta^* \end{aligned} \tag{2.7}$$

en prenant $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, et à partir d'un m_0 assez grand. D'autre part en appliquant $DI_\lambda(u_m)$ à $u_m - u_0$ on trouve, en utilisant (2.6), la convergence faible $u_m \rightharpoonup u_0$ dans $W_0^{1,2}(\Omega)$ et la

convergence forte dans $L^q(\Omega)$ si $q < 2^*$,

$$\begin{aligned}\langle DI_\lambda(u_m), u_m - u_0\rangle \to 0 \\ &= \int_\Omega \left(\nabla(u_m - u_0)\nabla u_m + \lambda(u_m - u_0)u_m - |u_m|^{2^*-2} u_m(u_m - u_0)\right) dx \\ &\to \int_\Omega \left(|\nabla(u_m - u_0)|^2 - |u_m - u_0|^{2^*}\right) dx + o(1)\end{aligned}$$

ce qui nous donne $I_0(u_m - u_0) = \frac{1}{n}\int_\Omega |\nabla(u_m - u_0)|^2\, dx + o(1)$. Enfin, on obtient $\|u_m - u_0\|^2_{D^{1,2}(\Omega)} \leq n(\beta + \varepsilon) < S^n$, on a eu une borne mais pas encore la convergence forte. Pour conclure, utilisons l'inégalité de Sobolev $\|u_m - u_0\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq S^{-1} \|u_m - u_0\|_{D^{1,2}(\Omega)}$ sur

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left(|\nabla(u_m - u_0)|^2 - |u_m - u_0|^{2^*}\right) dx \to 0 \\ &\geq \|u_m - u_0\|^2_{D^{1,2}(\Omega)} \left(1 - S^{-2^*} \|u_m - u_0\|^{2^*-2}_{D^{1,2}(\Omega)}\right)\end{aligned}$$

ce qui implique que $\|u_m - u_0\|_{D^{1,2}(\Omega)} \to 0$, i.e. $u_m \to u_0$ fortement dans $W^{1,2}_0(\Omega)$. □

Dans le Théorème, dans le cas où notre suite de Palais-Smale serait composée de fonctions à symétrie radiales, alors à la fois la limite faible u_0 et les u^j devraient hériter des mêmes symétries. Par le Lemme 1.6, on sait que ces u^j auront toutes la forme de bulles standard, à même niveau d'énergie β^*. La décomposition des énergies aura alors une forme plus élégante. Si (u_m) est notre suite de (P-S) qui tend faiblement vers u_0, on aura $I_\lambda(u_m) \to I_\lambda(u_0) + K\beta^*$. Et donc si on connaît au moins une solution radiale $\bar{u} \in W^{1,2}_0(\Omega)$ au problème (2.1) à niveau $I_\lambda(\bar{u}) = \beta_0$, la suite convergera fortement si elle est telle que $I_\lambda(u_m) \to \beta$ qui ne peut s'écrire $\beta = \beta_0 + k\beta^*$ pour un $k \geq 1$. De la même manière par le Théorème 1.7, si $(u_m)_m$ est une suite de Palais-Smale de termes positifs, on obtient la même chose et la suite convergera fortement si elle a $I_\lambda(u_m) \to \beta \neq \beta_0 + k\beta^*$, $k \geq 1$, où β_0 est le niveau d'une solution $\bar{u} \geq 0$. Dans le cas général où u^j change de signe, on avait dérivé que $I_0(u^j) > 2\beta^*$, de sorte que dans le Théorème 2.2 on sait que dans tous les cas $I_0(u^j) \in \{\beta^*\} \cup]2\beta^*, \infty[$.

Il est enfin à noter que la forme de décomposition des énergies que nous donne le Théorème n'est pas anodine. En effet la première partie du Théorème nous dit essentiellement $u_m = u_0 + \sum_j u^j_{R^j_m, x^j_m} + o(1)$ dans $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, mais la seconde partie nous dit que l'énergie de la somme est égale à la somme des énergies. Cela n'est possible que si les différentes bulles et la limite faible u_0 n'interagissent pas aux mêmes niveaux d'énergie. On a en effet le résultat de séparation des échelles suivant, issu de Hebey (2014, Section 3.3), qui peut nous donner une intuition de pourquoi c'est le cas.

Lemme 2.4 (de Structure). Dans le cadre du Théorème 2.2, on a de plus $\forall\, i \neq j$,

$$\frac{R^i_m}{R^j_m} + \frac{R^j_m}{R^i_m} + \frac{\left|x^i_m - x^j_m\right|^2}{R^i_m R^j_m} \to \infty \quad \text{pour } m \to \infty.$$

En d'autres termes soit les poids des bulles deviennent incomparables, et l'une ce concentre plus vite que l'autre, soit les bulles restent à distance relativement grande par rapport à la taille de leurs échelles.

Preuve. On se place dans le cadre du Théorème 2.2, avec $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ suite de Palais-Smale pour I_λ, $u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$ limite faible et avec

$$\left\| u_m - u_0 - \sum_j u_m^j \right\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^n)} \to 0.$$

À partir de maintenant pour simplifier les notations nous écrirons toujours $u_m^j := u^j_{R_m^j, x_m^j}$ lorsque les R_m^j, x_m^j sont définis sans ambiguïté. On notera également

$$E(u_m^i, u_m^j) := \frac{R_m^i}{R_m^j} + \frac{R_m^j}{R_m^i} + \frac{\left|x_m^i - x_m^j\right|^2}{R_m^i R_m^j} \tag{2.8}$$

et on définit

$$J(i) := \{j \text{ tel que } E(u_m^i, u_m^j) \text{ est borné}\}. \tag{2.9}$$

Clairement $i \in J(i)$, on doit montrer que c'en est l'unique élément. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on peut le translater et le remettre à l'échelle comme u^i pour avoir

$$\varphi_{i,m} : \Omega \to \mathbb{R} : \varphi_{i,m}(x) := (R_m^i)^{-\frac{n-2}{2}} \varphi\left(\frac{x - x_m^i}{R_m^i}\right).$$

Puisque $R_m^i \to 0$, on a

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla \varphi_{i,m}|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^2 \, dx + o(1) \\ \displaystyle\int_\Omega |\varphi_{i,m}|^{2^*} \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^{2^*} \, dx + o(1). \end{cases}$$

Comme $\varphi_{i,m} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ et $u_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ par le Théorème de régularité des solutions critiques, on peut vérifier (cela vient essentiellement du changement de variable $y = \frac{x - x_m^i}{R_m^i}$ dans les intégrales) de par la forme de $\varphi_{i,m}$ que

$$\int_\Omega u_0 |u_0|^{2^*-2} \varphi_{i,m} dx = o(1)$$
$$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla \varphi_{i,m} dx = o(1)$$

et de façon similaire si $j \notin J(i)$,

$$\int_\Omega u_m^j \left|u_m^j\right|^{2^*-2} \varphi_{i,m} dx = o(1)$$
$$\int_\Omega \nabla u_m^j \nabla \varphi_{i,m} dx = o(1).$$

En revanche si $j \in J(i)$, le changement d'échelle donnera cette fois

$$\int_\Omega u_m^j \left|u_m^j\right|^{2^*-2} \varphi_{i,m} dx = \int_{\mathbb{R}^n} u^j_{\lambda_j, a_j} \left|u^j_{\lambda_j, a_j}\right|^{2^*-2} \varphi dy + o(1)$$
$$\int_\Omega \nabla u_m^j \nabla \varphi_{i,m} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u^j_{\lambda_j, a_j} \nabla \varphi dy + o(1),$$

où $\lambda_j = \frac{R_m^j}{R_m^i}$ et $a_j = \frac{x_m^i - x_m^j}{R_m^i} \in \mathbb{R}^n$. Donc, à sous-suite près, comme le Théorème 2.2 nous donne $u_m = u_0 + \sum_j u_m^j + o(1)$ dans $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, en utilisant toutes les égalités ci-dessus on a

$$\int_\Omega u_m \left|u_m\right|^{2^*-2} \varphi_{i,m} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j\in J(i)} u^j_{\lambda_j,a_j} \right) \left| \sum_{j\in J(i)} u^j_{\lambda_j,a_j} \right|^{2^*-2} \varphi dy + o(1)$$
$$\int_\Omega \nabla u_m \nabla \varphi_{i,m} dx = \sum_{j\in J(i)} \int_{\mathbb{R}}^n \nabla u^j_{\lambda_j,a_j} \nabla \varphi dy + o(1).$$

Or les u^j sont solution de $-\Delta u = |u|^{2^*-2} u$ sur $\mathbb{R}^n$n et donc $\forall\ j$

$$\int_{\mathbb{R}}^n \nabla u^j_{\lambda_j,a_j} \nabla \varphi dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left| u^j_{\lambda_j,a_j} \right|^{2^*-2} u^j_{\lambda_j,a_j} \varphi dy.$$

De plus $\int_\Omega u_m \varphi_{i,m} dx = o(1)$ puisque u_m est bornée car de (P-S) , on obtient donc au final, comme $DI_\lambda(u_m) \to 0$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j\in J(i)} u^j_{\lambda_j,a_j} \right) \left| \sum_{j\in J(i)} u^j_{\lambda_j,a_j} \right|^{2^*-2} \varphi dy &= \int_\Omega u_m \left|u_m\right|^{2^*-2} \varphi_{i,m} dx + o(1) \\
&= \int_\Omega \nabla u_m \nabla \varphi_{i,m} dx + o(1) \\
&= \sum_{j\in J(i)} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u^j_{\lambda_j,a_j} \nabla \varphi dy + o(1) \\
&= \sum_{j\in J(i)} \int_{\mathbb{R}^n} \left| u^j_{\lambda_j,a_j} \right|^{2^*-2} u^j_{\lambda_j,a_j} \varphi dy + o(1).
\end{aligned}$$

En passant à la limite on a donc, comme pour chaque $j \in J(i)$ λ_j doit converger et a_j aussi vers respectivement $\bar{\lambda}_j$ et $\bar{a}_j$, $\forall\ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j\in J(i)} u^j_{\bar{\lambda}_j,\bar{a}_j} \right) \left| \sum_{j\in J(i)} u^j_{\bar{\lambda}_j,\bar{a}_j} \right|^{2^*-2} \varphi dy = \sum_{j\in J(i)} \int_{\mathbb{R}^n} \left| u^j_{\bar{\lambda}_j,\bar{a}_j} \right|^{2^*-2} u^j_{\bar{\lambda}_j,\bar{a}_j} \varphi dy. \tag{2.10}$$

Cela ne peut être possible que si $J(i)$ n'est composé que d'un seul élément, et donc $J(i) = \{i\}$. □

Preuve du Théorème 2.2 : Toute la preuve du Théorème se repose sur le Lemme suivant.

Lemme 2.5. Soit $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de (P-S) pour I_0 dans $W_0^{1,2}(\Omega)$ telle que $v_m \rightharpoonup 0$ faiblement. Alors on a une suite de centres (x_m) dans Ω et de poids $R_m \to 0$, une suite de Palais-Smale (w_m) pour I_0 dans $W_0^{1,2}(\Omega)$ et une solution non-triviale au problème critique limite (1.40) $v^0 \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ tels que, à sous-suite près

$$w_m = v_m - v^0_{R_m,x_m} + o(1) \quad \text{dans } D^{1,2}(\mathbb{R}^n) \text{ pour } m \to \infty.$$

En particulier $w_m \rightharpoonup 0$ faiblement, et

$$I_0(w_m) = I_0(v_m) - I_0(v^0) + o(1)$$
$$\frac{\mathrm{dist}(x_m, \partial\Omega)}{R_m} \to \infty.$$

Finalement, si (v_m) est de (P-S) à niveau $\beta < \beta^*$, (v_m) est relativement compacte et $v_m \to 0$ fortement dans $W_0^{1,2}(\Omega)$, avec $I_0(v_m) \to 0$ pour $m \to \infty$.

Preuve. Déjà, le Lemme 2.3 nous donne la dernière partie de l'énoncé, si v_m est de Palais-Smale à niveau $\beta < \beta^*$ on sait que v_m aura une sous-suite fortement convergente, et par unicité de la limite $v_m \to 0$ dans $W_0^{1,2}(\Omega)$ et $I(v_m) \to I(0) = 0$.

On peut donc supposer que

$$I_0(v_m) \to \beta \geq \beta^* = \frac{S^n}{n},$$

on sait alors que $v_m \not\to 0$ fortement, puisque

$$\frac{1}{n}\int_\Omega |\nabla v_m|^2 \, dx = I_0(v_m) - \frac{1}{2^*}\langle v_m, DI_0(v_m)\rangle \to \beta$$

d'où

$$\liminf_{m\to\infty} \int_\Omega |\nabla v_m|^2 \, dx = n\beta \geq S^n. \tag{2.11}$$

Dans ce cas plus restreint que celui du Théorème, on veut montrer qu'il ne peut y avoir qu'une explosion de type "bulle", i.e. solution à l'équation critique limite. Pour renormaliser v_m on va appliquer l'opération de translation et mise à l'échelle inverse, c'est à dire poser

$$\tilde{v}_m(x) := R_m^{\frac{n-2}{2}} v_m\left(R_m x + x_m\right) \qquad \left(v_m = (\tilde{v}_m)_{R_m, x_m}\right), \tag{2.12}$$

le domaine Ω devient donc $\tilde{\Omega}_m = \{x \in \mathbb{R}^n : \ R_m x + x_m \in \Omega\}$. Appliquons cette action avec des R_m, x_m tels que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \int_{B(x,1)} |\nabla \tilde{v}_m|^2 \, dx = \int_{B(0,1)} |\nabla \tilde{v}_m|^2 \, dx = \frac{1}{2L} S^n, \tag{2.13}$$

c'est à dire qu'on se place au centre de la concentration en norme $W_0^{1,2}$ de v_m, et on effectue une remise à l'échelle où $L \in \mathbb{R}$ est une constante indépendante qu'on choisira plus tard. On a donc

$$\int_{B(0,1)} |\nabla \tilde{v}_m|^2 \, dx = \int_{B(-x_m, 1/R_m)} |\nabla v_m|^2 \, dx = \frac{1}{2L} S^n,$$

on peut supposer $\tilde{\Omega}_m \to \tilde{\Omega}_\infty \subseteq \mathbb{R}^n$.

Puisqu'en plus $\|\tilde{v}_m\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^n)} = \|v_m\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^n)} \to n\beta < \infty$ bornée, on peut aussi supposer à sous-suite près que $\tilde{v}_m \rightharpoonup v^0$ faiblement dans $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. On va montrer qu'en fait $\tilde{v}_m \to v^0$ fortement dans $W^{1,2}(\Omega')$ $\forall$ $\Omega' \subset\subset \mathbb{R}^n$. Pour ce faire il suffira de montrer que c'est vrai sur des Ω' de la

forme $\Omega' = B(x_0, 1)$ boule unité centrée en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque. Prenons des fonctions cut-off $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que $0 \leq \varphi_i \leq 1$ pour $i = 1, 2$, et

$$\varphi_1 \equiv 1 \text{ sur } B(x_0, 1) \text{ avec } \varphi_1 \equiv 0 \text{ hors de } B(x_0, 3/2),$$
$$\varphi_2 \equiv 1 \text{ sur } B(x_0, 3/2) \text{ avec } \varphi_2 \equiv 0 \text{ hors de } B(x_0, 2).$$

Par densité des fonctions $C_0^\infty(\Omega)$ dans $D^{1,2}(\Omega)$, on peut également considérer une suite de fonctions $v_m^0 \in C_0^\infty(\tilde{\Omega}_m)$ telles que $v_m^0 \to v^0$ fortement dans $D^{1,2}(\tilde{\Omega}_\infty)$. Alors $\tilde{v}_m \to v^0$ au sens fort dans $W^{1,2}(\Omega')$ si et seulement si

$$\left\|\tilde{v}_m - v_m^0\right\|_{W^{1,2}(\Omega')} \to 0.$$

On va poser

$$w_{m,i} := (\tilde{v}_m - v_m^0)\varphi_i \in W_0^{1,2}(\tilde{\Omega}_m) \quad \text{ pour } i = 1, 2, \tag{2.14}$$

on a $w_{m,1}$ à support dans $B(x_0, 3/2)$ et $w_{m,2}$ à support dans $B(x_0, 2)$. De plus, comme $(\tilde{v}_m - v_m^0) \rightharpoonup 0$ faiblement dans $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, on a $w_{m,i} \rightharpoonup 0$ dans $W^{1,2}(B(x_0, 2))$, et donc par compacité des injections $W^{1,2}(B(x_0, 2)) \hookrightarrow L^p(B(x_0, 2))$ si $p < 2^*$, on a $w_{m,i} \to 0$ dans $L^p(B(x_0, 2))$.

On a alors d'une part

$$\begin{aligned}\langle DI_0(\tilde{v}_m), w_{m,1}\varphi_1\rangle &= o(1)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\nabla\tilde{v}_m\nabla w_{m,1} - \tilde{v}_m \left|\tilde{v}_m\right|^{2^*-2} w_{m,1}\right)\varphi_1 dx + \int_{\mathbb{R}^n} \left(\nabla\tilde{v}_m\nabla\varphi_1 w_{m,1}\right) dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\nabla\tilde{v}_m\nabla w_{m,1} - \tilde{v}_m \left|\tilde{v}_m\right|^{2^*-2} w_{m,1}\right)\varphi_1 dx + o(1)\end{aligned} \tag{2.15}$$

puisque $w_{m,1} \to 0$ dans $L^2(B(x_0, 2))$. En utilisant à nouveau cette convergence L^p pour p sous-critique, que $w_{m,1} = \varphi_1(\tilde{v}_m - v_m^0)$ et des arguments habituels, on a

$$\begin{aligned}\langle DI_0(\tilde{v}_m), w_{m,1}\varphi_1\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\left|\nabla(\tilde{v}_m - v_m^0)\right|^2 - \left|\tilde{v}_m - v_m^0\right|^{2^*}\right)\varphi_1^2 dx + o(1)\\ &\geq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\left|\nabla(\tilde{v}_m - v_m^0)\right|^2 \varphi_1^2 - \left|\tilde{v}_m - v_m^0\right|^{2^*} \varphi_1^2\varphi_2^{2^*-2}\right) dx + o(1)\end{aligned}$$

puisque $\varphi_2 \leq 1$, donc

$$\begin{aligned}\langle DI_0(\tilde{v}_m), w_{m,1}\varphi_1\rangle &\geq \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\nabla w_{m,1}|^2 - |w_{m,1}|^2 |w_{m,2}|^{2^*-2}\right) dx + o(1)\\ &\geq \|w_{m,1}\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^n)} \left(1 - S^{-2^*} \|w_{m,2}\|^{2^*-2}_{D^{1,2}(\mathbb{R}^n)}\right) + o(1)\end{aligned}$$

par inégalité de Sobolev. Mais on sait aussi que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla w_{m,2}|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left|\nabla(\tilde{v}_m - v_m^0)\right|^2 \varphi_2^2 dx + o(1)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\nabla\tilde{v}_m|^2 - \left|\nabla v_m^0\right|^2\right)\varphi_2^2 dx + o(1) \leq \int_{B(x_0,2)} |\nabla\tilde{v}_m|^2 dx + o(1)\\ &\leq L. \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \int_{B(x,1)} |\nabla\tilde{v}_m|^2 dx + o(1) = \frac{S^n}{2} + o(1)\end{aligned}$$

où on définit $L \in \mathbb{R}$ constante telle que la boule de rayon 2 est couverte par L boules de rayon 1, c'est donc un nombre qui ne dépend que de la dimension de l'espace $n \geq 3$. Donc à partir d'un m suffisamment grand on aura $S^{-2^*} \|w_{m,2}\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^n)}^{2^*-2} \leq \frac{1}{2} S^{-2^*+n(2^*-2)} + \varepsilon = \frac{1}{2} + \varepsilon < 1$ uniformément. Toutes ces inégalités mènent à conclure que $\|w_{m,1}\|_{D^{1,2}} \to 0$, et donc $\tilde{v}_m \to v^0$ au sens fort localement, dans $W^{1,2}(\Omega')\ \forall\ \Omega' \subset\subset \mathbb{R}^n$. De plus comme dans le Lemme 2.3 on peut voir que v^0 sera bien solution de l'équation critique limite. En particulier, et grâce à la convergence forte, on doit avoir pour notre choix de R_m, x_m,

$$\int_{B(0,1)} \left|\nabla v^0\right|^2 dx = \frac{1}{2L} S^n > 0 \tag{2.16}$$

donc $v^0 \not\equiv 0$. Or v^0 est la limite des fonctions $\tilde{v}_m$ obtenues à partir des $v_m \rightharpoonup 0$, et donc le seul moyen est que $R_m \to 0$, si les $1/R_m$ étaient bornés on aurait forcément $\tilde{v}_m \rightharpoonup 0$. Dans ce cas il y a deux possibilités pour $\tilde{\Omega}_m$,

- soit si $\frac{\text{dist}(x_m, \partial\Omega)}{R_m}$ est borné $\forall m$, $\tilde{\Omega}_\infty$ sera un demi espace,
- soit $\frac{\text{dist}(x_m, \partial\Omega)}{R_m} \to \infty$ et $\tilde{\Omega}_\infty = \mathbb{R}^n$.

Mais sur un demi-espace on peut reprendre la preuve du résultat de non-existence 1.2 et on obtiendra que

$$\int_{\partial\Omega} \left|\frac{\partial v^0}{\partial \nu}\right|^2 x \cdot \nu dx = 0$$

ce qui nous donne $\frac{\partial v^0}{\partial \nu} \equiv 0$ sur $\partial\Omega$ et donc v^0 est solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = u\left|u\right|^{2^*-2} & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \text{ un hyperplan} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \end{cases} \tag{2.17}$$

dont la seule solution ne peut être que $v^0 \equiv 0$. En effet, d'une part si on suppose que $u = 0$ dans un voisinage V de l'hyperplan $\partial\Omega$, alors $\nabla v^0 = 0$ dans V et on peut définir Ω' nouveau demi-espace légèrement translaté par rapport à Ω pour que $\partial\Omega'$ soit toujours dans V. La fonction v^0 satisfait alors strictement les mêmes équations (2.17), et par symétrie on a le même voisinage V en translaté, autour de $\partial\Omega'$. Mais alors de cette façon on peut étendre $v^0 = 0$ à tout le demi-espace, $v^0 \equiv 0$ sur Ω. Donc si on suppose que $v^0 \not\equiv 0$, l'hyperplan $\partial\Omega$ où $v^0 = 0$ est forcément isolé, et comme v^0 est continu, selon son signe à côté de $\partial\Omega$ il doit y avoir une intersection non-vide entre $\partial\Omega$ et l'adhérence de

$$\Omega_+ := \{x \in \Omega :\ v^0(x) > 0\} \text{ ou } \Omega_- := \{x \in \Omega :\ v^0(x) < 0\}.$$

Disons par exemple que $\partial\Omega_+ \cap \partial\Omega \neq \phi$. Sur cet ensemble Ω_+ puisque v^0 satisfait (2.17), on obtient $-\Delta v^0 > 0$, on peut alors utiliser le principe du maximum fort dans un sous-ensemble borné $D \subseteq \Omega_+$ dont le bord intersecte toujours $\partial\Omega$, et conclure que $\frac{\partial v^0}{\partial \nu} < 0$ sur ∂D. On a alors si $x \in \partial\Omega \cap \partial D$, $\frac{\partial v^0}{\partial \nu}(x) \neq 0$ en $x \in \partial\Omega$ ce qui contredit (2.17).

On se trouve donc dans le second cas, $\tilde{\Omega}_\infty = \mathbb{R}^n$, et

$$\frac{\text{dist}(x_m, \partial\Omega)}{R_m} \to \infty, \quad R_m \to 0. \tag{2.18}$$

On avait $\tilde{v}_m \to v^0$ avec $(\tilde{v}_m)_{R_m,x_m} = v_m$, pour finir la preuve on doit encore trouver une suite w_n de Palais-Smale satisfaisant les conditions annoncées.

On commence par prendre $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ fonction cut-off $0 \leq \varphi \leq 1$ avec $\varphi \equiv 1$ sur $B(0,1)$ et $\varphi \equiv 0$ hors de $B(0,2)$, et posons

$$\tilde{w}_m(x) := \tilde{v}_m(x) - v^0(x)\varphi(R'_m x) \tag{2.19}$$

où R'_m est une suite qui tend vers 0 avec $\frac{R'_m}{R_m}\operatorname{dist}(x_m, \partial\Omega) \to \infty$, i.e. on prend

$$w_m(x) = v_m(x) - v^0_{R_m,x_m}(x)\varphi\left(\frac{R'_m x - x_m}{R_m}\right). \tag{2.20}$$

On aura

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \left|\nabla\left(v^0(x)(\varphi(R'_m x)-1)\right)\right|^2 dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|\nabla v^0(x)\right|^2 (\varphi(R'_m x)-1)^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} \left|v^0(x)\right|^2 \left|\nabla(\varphi(R'_m x))\right|^2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,1/R'_m)} \left|\nabla v^0\right|^2 dx + (R'_m)^2 \int_{B(0,2/R'_m)\setminus B(0,1/R'_m)} \left|v^0\right|^2 dx.\end{aligned}$$

Mais $\nabla v^0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ donc le premier terme tend vers 0 pour $R'_m \to^{m\to\infty} 0$. Pour le second, on a à partir d'un m assez grand

$$(R'_m)^2 \int_{B(0,2/R'_m)\setminus B(0,1/R'_m)} \left|v^0\right|^2 dx \leq C\left(\int_{B(0,2/R'_m)\setminus B(0,1/R'_m)} \left|v^0\right|^{2^*} dx\right)^{2/2^*} \to 0 \text{ pour } m \to \infty.$$

On a donc $\tilde{w}_m = \tilde{v}_m - v^0 + o(1)$, et par ce qu'on a déjà réutilisé en (2.6) pour la suite de Palais-Smale $\tilde{v}_m \rightharpoonup v^0$,

$$I_0(w_m) = I_0(\tilde{w}_m) = I_0(\tilde{v}_m) - I_0(v^0) + o(1) = I_0(v_m) - I_0(v^0) + o(1). \tag{2.21}$$

Il ne reste qu'à montrer, pour avoir $\tilde{w}_m$ de (P-S) , que $DI_0(\tilde{w}_m) \to 0$. Soit $\psi \in W^{1,2}(\tilde{\Omega}_m)$ avec $\|\psi\| \leq 1$, on a

$$\begin{aligned}\langle DI_0(\tilde{w}_m), \psi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\nabla\tilde{w}_m\nabla\psi - \tilde{w}_m\left|\tilde{w}_m\right|^{2^*-2}\psi\right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\nabla\tilde{v}_m\nabla\psi - \tilde{v}_m\left|\tilde{v}_m\right|^{2^*-2}\psi\right) dx - \int_{\mathbb{R}^n} \left(\nabla v^0\nabla\psi - v^0\left|v^0\right|^{2^*-2}\psi\right) dx + o(1) \\ &= \langle DI_0(\tilde{v}_m), \psi\rangle - \underbrace{\langle DI_0(v^0), \psi\rangle}_{=0} + o(1) \to 0.\end{aligned}$$

On a donc enfin, comme $I_0(w_m) = I_0(\tilde{w}_m)$, que w_m est aussi de Palais-Smale, avec $v^0_{R_m,x_m} \rightharpoonup 0$ donc

$$w_m = v_m - v^0_{R_m,x_m} + o(1), \quad w_m \rightharpoonup 0. \tag{2.22}$$

□

On a maintenant tout ce qu'il nous faut pour démontrer le Théorème principal 2.2.

Preuve (du Théorème 2.2). Comme on l'a déjà fait à plusieurs reprises, on utilise le fait que toute suite de Palais-Smale est bornée pour avoir un $u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tel que $u_m \rightharpoonup u_0$ à sous-suite près.

On sait alors que u_0 sera solution du problème (2.1). De plus, comme dans le Lemme ci-dessus, par (2.6) on a

$$\int_\Omega |u_m - u_0|^{2^*} dx = \int_\Omega |u_m|^{2^*} dx - \int_\Omega |u_0|^{2^*} dx + o(1)$$
$$\int_\Omega |\nabla(u_m - u_0)|^2 dx = \int_\Omega |\nabla u_m|^2 dx - \int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx + o(1).$$

On obtient donc directement

$$I_\lambda(u_m) = I_\lambda(u_0) + I_0(u_m - u_0) + o(1)$$
$$\text{et } DI_\lambda(u_m) = DI_\lambda(u_0) + DI_0(u_m - u_0) + o(1) = DI_0(u_m - u_0) + o(1).$$

On pose $v_m^1 := u_m - u_0$, $v_m^1 \rightharpoonup 0$ et on est dans le cadre du Lemme qu'on vient de montrer, on obtient des $x_m^1, R_m^1 \to^{m\to\infty} 0$ et une solution non-triviale u^1 à l'équation critique limite (1.40) tels que $v_m^2 := v_m^1 - u^1_{R_m^1, x_m^1} = u_m - u_0 - u^1_{R_m^1, x_m^1}$ tend faiblement vers 0 dans $W_0^{1,2}(\Omega)$. On a également

$$I_0(v_m^2) = I_0(v_m^1) - I_0(u^1) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow I_\lambda(u_m) = I_\lambda(u_0) + I_0(u^1) + I_0(v_m^2).$$

On procède ensuite par récurrence, dont on vient de montrer la première étape, on obtient des

$$v_m^j := v_m^{j-1} - u^{j-1}_{R_m^{j-1}, x_m^{j-1}} = u_m - u_0 - \sum_{i=1}^{j-1} u^i_{R_m^i, x_m^i} \tag{2.23}$$

avec

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_m) &= I_\lambda(u_0) + \sum_{i=1}^{j} I_0(u^i), \\ I_0(v_m^j) &= I_\lambda(u_m) - I_\lambda(u_0) - \sum_{i=1}^{j-1} I_0(u^i). \end{aligned} \tag{2.24}$$

Comme chaque u^j a au moins l'énergie d'une bulle, on sait qu'à chaque étape du processus on perd au moins une énergie β^*,

$$I_0(v_m^j) \leq I_\lambda(u_m) - (j-1)\beta^*.$$

Donc pour un indice, disons $K \geq 0$ assez grand $I_0(v_m^K) < \beta^*$ et la procédure de récurrence va se terminer par la dernière partie du Lemme 2.5 qui nous dit que

$$v_m^{K+1} := u_m - u_0 - \sum_{i=1}^{K} u_m^j \to 0 \text{ au sens fort dans } D^{1,2}(\mathbb{R}^n), \text{ et}$$
$$I_\lambda(u_m) - I_\lambda(u_0) - \sum_{i=1}^{K} I_0(u^j) \to 0$$

ce qui conclut la preuve. □

2.3 Le problème de Yamabe :

On va maintenant pouvoir utiliser les résultats de ce chapitre et introduire un problème concret où l'équation critique (2.1) émerge naturellement. Celui ci provient originellement de Yamabe (1960), qui pensait à tort l'avoir résolu. Pour suivre les discussions de cette dernière partie il n'est pas nécessaire d'avoir une connaissance profonde des notions de géométrie différentielle, mais on pourra se référer à Lee (2003, 2018) pour les bases de la théorie et Hebey (2014) pour une dérivation plus en détail de l'équation. On commencera par rapidement rappeler toutes les notions dont nous aurons besoin.

Soit (M, g) une variété riemannienne fermée de dimension $n \geq 3$, avec une métrique g. On rappelle qu'en coordonnées locales $(x^1, \dots x^n)$, g est déterminée par les $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$, et on utilisera la convention de sommation sur les indices répétés d'Einstein. On notera également $g^{ij} := (g^{-1})^{ij}$.

Définition 3.1. Prenons (M, g) variété riemannienne, avec ∇ sa connexion de Levi-Civita, on définit le *tenseur de courbure*

$$R(X, Y) := \nabla_X \circ \nabla_Y - \nabla_Y \circ \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$$

pour deux champs de vecteurs X, Y sur M. On définit aussi la notion de *courbure sectionnelle*, courbure calculée en plaçant des plans tangents à la variété, et la *courbure scalaire* qui s'exprime localement en contractant R,

$$C_g := g^{ij} g^{km} R_{kijm}$$

où $R_{kijm} = g(R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^m}, \frac{\partial}{\partial x^k})$.

La courbure scalaire encapsule dans un nombre la courbure sectionnelle selon tous les plans tangents en un point.

Définition 3.2. À partir d'une métrique initiale g sur M, on peut construire toute une famille de métriques dites *conformes*, $\tilde{g} = \varphi g$ pour $\varphi \in C^\infty((M, g); \mathbb{R})$.

Sous ce changement de métrique, les quantités définies ci-dessus se transforment également. On peut vérifier qu'en prenant $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$, alors les courbures scalaires avant et après transformation sont liées par

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} C_g u = \frac{n-2}{4(n-1)} C_{\tilde{g}} u^{\frac{n+2}{n-2}} \tag{3.1}$$

où Δ_g est l'opérateur de Laplace-Beltrami qui étend la définition du laplacien dans une variété différentiable. On a

$$\Delta_g = -\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = -\frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(g^{ij} \sqrt{\det g} \frac{\partial u}{\partial x^j} \right)$$

en coordonnées locales.

La question posée par Yamabe était de savoir s'il est toujours possible quelle que soit la variété de trouver une métrique conforme pour laquelle la courbure scalaire soit constante.

Définition 3.3. De façon similaire à dans $\mathbb{R}^n$, on va définir l'espace de Sobolev $W^{1,2}(M, g)$ avec la norme

$$\|u\|_{W^{1,2}(M,g)} := \int_M \left(|\nabla u|_g^2 + |u|^2 \right) d\omega_g$$

où $d\omega_g$ est la forme volume $d\omega_g := \sqrt{\det g}dx$. On différentie assi $|u|$ la valeur absolue de $u : M \to \mathbb{R}$ et $|\nabla u|_g^2 := g(\nabla u, \nabla u)$ norme des vecteurs dans l'espace tangent.

Dans une variété fermée il n'y a pas de sens à parler de valeur nulle au bord, on va donc simplement chercher une solution $u \in W^{1,2}(M, g)$, $u \geq 0$ telle que

$$\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_g u + C_g u = C_{\tilde{g}} u^{2^*-1}, \quad \text{avec } C_{\tilde{g}} \text{ constante.} \tag{3.2}$$

Cette équation ressemble terriblement à l'équation critique étudiée dans les sections précédentes, avec deux subtilités.

Premièrement ici il ne s'agit pas d'un opérateur laplacien standard, mais de sa version covariante, et toutes les intégrations se feront par rapport à la forme volume $d\omega_g$ associée à la métrique initiale g. Il faudrait donc modifier tous nos théorèmes et constructions pour tenir compte de cela, mais ça ne changera rien, d'une part car $\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_g$ est toujours un opérateur différentiel elliptique et d'autre part car l'intégration par rapport à une forme volume dans une variété ne modifie aucune de nos conclusion. Pour une dérivation de tous les résultats dans ce formalisme on pourra se référer à Hebey (2014).

En second lieu, une différence qui pourrait sembler fondamentale est que le terme en u dans (3.2) est multiplié par une fonction $C_g(x)$ et non par un réel λ comme plus tôt. Toutefois tant que $C_g \in L^\infty(M, d\omega_g)$, ce qui est toujours le cas pour une variété compacte, tout se comporte exactement comme lorsqu'il s'agit d'une constante.

Comme avant pour étudier ce problème on définit le quotient

$$S^2_{C_g}(u; (M, g)) := \frac{\int_M \left(c_n |\nabla u|_g^2 + C_g |u|^2\right) d\omega_g}{\left(\int_M |u|^{2^*} d\omega_g\right)^{2/2^*}}, \quad \text{où } c_n := \frac{4(n-1)}{n-2}. \tag{3.3}$$

On définit également l'équivalent de $S^2_\lambda(\Omega)$, la constante de Yamabe

$$Y(M, g) := \inf\{S^2_{C_g}(u; (M, g)) : \ u \neq 0 \in W^{1,2}(M, g)\}. \tag{3.4}$$

De par la forme des équations, si $Y(M, g)$ est atteinte par u_0, et $Y \neq 0$, alors u_0 est solution de (3.2),

$$\begin{aligned} Y(M, g) &= S^2_{C_g}(u_0; (M, g)) = S^2_{C_g}(\mu u_0; (M, g)) \quad \forall \mu \neq 0 \\ &= C_{\tilde{g}} \|u_0\|^{2^*-2}_{L^{2^*}}. \end{aligned}$$

Quitte à multiplier u_0 par une constante on peut supposer $|C_{\tilde{g}}| = 1$ et $Y(M, g)$ sera toujours atteint par ce nouveau u_0. Comme plus tôt la minimisation de ce quotient correspond à trouver un point critique de la fonctionnelle

$$I_{C_g}(u) := \frac{1}{2}\int_M \left|c_n |\nabla u|_g^2 + C_g |u|^2\right| d\omega_g \pm \frac{1}{2^*}\int_M |u|^{2^*} d\omega_g \tag{3.5}$$

où le signe devant le terme $\|u\|_{L^{2^*}(M, d\omega_g)}$ dépend de la positivité de $Y(M, g)$.

Si $Y(M, g) < 0$ alors I_{C_g} est coercive sur $W^{1,2}(M, g)$ et on peut utiliser une méthode variationnelle directe pour trouver une solution u non nulle, comme en Section 1.1. On va donc s'intéresser au cas où $Y(M, g) > 0$, pour lequel la fonctionnelle a un signe "moins" et ressemble à (1.18).

Le cas de la sphère : Soit $M = S^n$ la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 3$. On sait que comme variété de dimension n, S^n est envoyée localement par difféomorphisme sur $\mathbb{R}^n$ via l'application de carte, la projection stéréographique. De cette manière on peut inverser la projection et partir de

$$x \in \mathbb{R}^n \mapsto \left(\frac{2x}{1+|x|^2}, \frac{1-|x|^2}{1+|x|^2} \right) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Cette application permet de relever la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^n$ et équipe la sphère d'une métrique

$$g_{S^n} = \frac{4}{(1+|x|^2)^2} g_{\mathbb{R}^n} \tag{3.6}$$

de courbure scalaire constante $C_{g_{S^n}} = n(n-1)$. La question de Yamabe est donc répondue positivement pour la sphère S^n, et on reconnaît en plus l'expression d'une bulle standard sur $\mathbb{R}^n$ comme facteur conforme $u^{4/(n-2)}$ entre la métrique de $\mathbb{R}^n$ plate, avec $C_{g_{\mathbb{R}^n}} = 0$, et celle de la sphère. Et en effet la bulle est solution de l'équation critique limite, qui s'écrit comme (3.2) sur $\mathbb{R}^n$

$$\Delta_{g_{\mathbb{R}^n}} u = u^{2^*-1}, \qquad \Delta_{g_{\mathbb{R}^n}} = -\Delta.$$

En particulier en mettant ensemble tout ce qu'on sait sur les bulles standard on a

$$n(n-1) = Y(S^n, g_{S^n}) = S^2_{C_{g^n_S}}(u; (S^n, g_{S^n})) = S^2_0(b; (\mathbb{R}^n, g_{\mathbb{R}^n}) = c_n S^2 \tag{3.7}$$

où S est la meilleure constante de Sobolev pour l'injection de $D^{1,2}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^n)$.

On a alors un résultat identique au Théorème 1.4 (Aubin, 1976).

Théorème 3.4. Si $Y(M,g) < Y(S^n, g_{S^n})$, alors $Y(M,g)$ est atteint en un $u \neq 0 \in W^{1,2}(M,g)$, $u \geq 0$, qui induit une métrique conforme à courbure scalaire constante.

Et comme dans le Lemme 2.3, on a aussi que I_{C_g} satisfait la condition de Palais-Smale à niveau $\beta < \frac{1}{n} Y(S^n, g_{S^n})^{n/2}$. Enfin Schoen (1984) a permis de conclure le problème, en montrant qu'on a bien $Y(M,g) < Y(S^n, g_{S^n})$ sur les variétés compactes sans bord non conformes à la sphère.

Théorème 3.5. Soit (M,g) variété riemannienne compacte et sans bords de dimension $n \geq 3$. Alors il existe une métrique conforme à courbure scalaire constante.

Références

Adams, R. A., & Fournier, J. J. F. (2003). *Sobolev spaces* (Second éd., Vol. 140). Elsevier/Academic Press, Amsterdam.

Aubin, T. (1976). Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire. *J. Math. Pures Appl. (9)*, *55*(3), 269–296.

Caffarelli, L. A., Gidas, B., & Spruck, J. (1989). Asymptotic symmetry and local behavior of semilinear elliptic equations with critical Sobolev growth. *Comm. Pure Appl. Math.*, *42*(3), 271–297.

Druet, O. (2005). *Nonlinear analysis on manifolds.* Lecture at the East China Normal University in Shanghaï.

Evans, L. C. (1998). *Partial differential equations* (Vol. 19). American Mathematical Society, Providence, RI.

Hajlasz, P. (s. d.). *Non-linear elliptic partial differential equations.* Lecture at the University of Pittsburgh, Department of Mathematics, 301 Thackeray Hall, Pittsburgh, PA 15260, USA. Consulté sur `http://www.pitt.edu/~hajlasz/Notatki/Cortona%20Lectures.pdf`

Hebey, E. (2014). *Compactness and stability for nonlinear elliptic equations.* European Mathematical Society (EMS), Zürich.

Lee, J. M. (2003). *Introduction to smooth manifolds* (Vol. 218). Springer-Verlag, New York.

Lee, J. M. (2018). *Introduction to Riemannian manifolds* (Vol. 176). Springer, Cham. (Second edition of [MR1468735])

Premoselli, B. (2020-2021). *Méthodes variationnelles et équations elliptiques.* Cours enseigné à l'Université Libre de Bruxelles - Math F412.

Schoen, R. (1984). Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature. *J. Differential Geom.*, *20*(2), 479–495.

Struwe, M. (2008). *Variational methods* (4e éd., Vol. 34). Springer-Verlag, Berlin. (Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems)

Yamabe, H. (1960). On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds. *Osaka Mathematical Journal*, *12*(1), 21 – 37.